18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

KÖN. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Sieben und funfzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1860.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhalts-Verzeichniss des sieben und funfzigsten Bandes.

Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Von Herrn *H. Helmholtz* zu Heidelberg. . . . . Seite 1

Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 73

Note über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Von Herrn *S. Spitzer* zu Wien. . . . . — 78

Bemerkung zu vorstehender Note. Vom Herausgeber. . . . . — 81

Ueber die Integration der Differentialgleichung $x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y$ durch bestimmte Integrale. Von Herrn *S. Spitzer* zu Wien. . . . . — 82

Ueber einige geometrische Sätze. Von Herrn *von Staudt* zu Erlangen. . . — 88

Zwei Sätze über das gröfste Product aus ganzen Zahlen von gegebener Summe. Von Herrn *Oettinger* zu Freiburg i. Br. . . . . — 90

Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 93

Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante. (Aus dem Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.) Von *C. W. Borchardt*. . . . . — 111

Ueber eine mit der Gammafunction verwandte Transcendente und deren Anwendung auf die Integralrechnung. Von Herrn *Kinkelin* früher zu Aarburg gegenwärtig zu Bern. . . . . — 122

Sur l'Invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire, et sur le Résultant de trois fonctions quadratiques ternaires. Par M. *A. Cayley*. . — 139

Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. . . . . — 149

Ueber eine symbolische Formel, die sich auf die Zusammensetzung der binären quadratischen Formen bezieht. Von Herrn *L. Schläfli* zu Bern. . . . — 170

Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten. Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg. . . — 175

Vergleichung zweier Formen der Eliminations-Resultante. Von *C. W. Borchardt.* Seite 183
Ueber den biquadratischen Character der Zahl „Zwei". Aus einem Briefe *Dirichlets* an Herrn *Stern* zu Göttingen. . . . . — 187
Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme. Von Herrn *E. E. Kummer.* — 189
Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen. Von Herrn *E. Heine* zu Halle. . . . . — 231
Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante. Von Herrn *Kronecker.* . . . . . — 248
Von den Gammafunctionen und einer besonderen Art unendlicher Producte. Von Herrn *G. Bauer* zu München. . . . . — 256
Démonstration d'un théorème de *Jacobi* par rapport au problème de *Pfaff.* Par M. *A. Cayley.* . . . . . — 273
Ueber den Grad der abwickelbaren Fläche, die einer Fläche m^{ter} Ordnung doppelt umschrieben ist. Von Herrn *Joh. Nik. Bischoff* zu München. . . — 278
Zur Theorie der Elasticität. Von Herrn *C. Neumann* zu Halle. . . . . — 281
Theorie der circularpolarisirenden Medien. Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe. — 319
Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen. Von Herrn *Siebeck* zu Liegnitz. . . . . — 359
Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires, extrait d'une lettre à M. *Borchardt.* Par M. *Ch. Hermite* à Paris. . . . . — 371

Zum Gedächtnifs *Gustav Lejeune Dirichlets.* Vom Herausgeber. . . . . — 91

Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

(Von Herrn *H. Helmholtz* zu Heidelberg.)

Die mathematische Theorie der Orgelpfeifen ist von den bedeutendsten mathematischen Physikern vielfältig behandelt worden, aber seit den ersten Schritten, welche ***D. Bernoulli*** und ***Euler*** gethan haben, und durch welche die Hauptzüge der Erscheinung eine annähernde Erklärung fanden, um keinen wesentlichen Schritt vorgerückt. Der Grund davon hat hauptsächlich darin gelegen, dafs die Mathematiker es nicht wagten, die Annahme aufzugeben, dafs die Bewegung der Lufttheilchen im Innern der Röhre überall ihrer Axe parallel gerichtet, und sowohl die Geschwindigkeit wie der Druck in allen Punkten desselben Querschnitts der Röhre gleich grofs sei. Diese von den ersten Bearbeitern der Einfachheit wegen gemachte Annahme ist ganz unbedenklich für die von offenen Enden entfernteren Theile einer cylindrischen oder prismatischen Röhre, aber in der Nähe offener Enden, wo die ebenen Wellen der Röhre in den freien Raum überzugehen anfangen, um sich dort in Form kugeliger Wellen auszubreiten, ist jene Annahme nicht mehr zulässig, da es klar ist, dafs ein solcher Uebergang nicht sprungweise geschehen kann. ***Bernoulli, Euler*** und ***Lagrange*** hatten angenommen, dafs die Verdichtung am offenen Ende der Röhre stets gleich Null sei. Dafs sie sehr viel kleiner sein müsse als bei den gleichen Wellenphasen im Innern der Röhre, wo die bewegte Luft von den Röhrenwänden gehindert wird, sich seitlich auszudehnen, ist leicht einzusehen, da am offenen Ende kein anderes Hindernifs ihrer Ausdehnung besteht als die Trägheit der benachbarten Luftmassen. In so fern nähert sich jene Annahme und die darauf basirte Theorie allerdings sehr der Wahrheit, aber sie ist nicht vollständig richtig. Denn die Dichtigkeit am Ende der Röhre mufs allerdings gleich gesetzt werden der Dichtigkeit der anstofsenden Luft im freien Raume, aber nicht der constanten Dichtigkeit der ruhenden Luft, sondern der veränderten Dichtigkeit dieser selbst in Vibration gerathenen Luft. Deshalb widersprechen die Folgerungen aus jener Annahme auch in mancher anderen Beziehung der Erfahrung. So folgt daraus, wie

schon ***Poisson*** hervorgehoben hat, dafs bei gewissen Röhrenlängen die Schwingungen im Innern, welche eine endliche Kraft oder eine endliche mitgetheilte Bewegung erregt, unendlich grofs werden, und einmal erregt, nicht wieder erlöschen, weil sie nichts von ihrer lebendigen Kraft der äufseren Luft mittheilen. ***Euler*** *) selbst hatte diese Abweichungen dadurch erklären wollen, dafs die Erschütterung sich zum Theil den Wänden der Röhre mittheilte und dadurch der Luftmasse verloren ginge. ***Poisson*** **) suchte den Grund richtiger in dem Umstande, dafs die Verdichtung am offenen Ende der Röhre nicht vollständig gleich Null, sondern nur sehr klein sei. Aber er wufste ihren wirklichen Werth nicht zu finden, sondern baute seine Theorie auf eine neue Hypothese, welche sich in unserer Untersuchung als im Allgemeinen unrichtig erweisen wird. Er machte nämlich die Annahme, dafs die Verdichtung am Ende der Röhre proportional der Geschwindigkeit sei, wie sie es bei ebenen fortschreitenden Wellen ist. Wenn die Geschwindigkeit v, die Verdichtung s, die Schallgeschwindigkeit a ist, so setzte er

$$kv = as.$$

Die Constante k nimmt er an geschlossenen Enden als sehr klein, an offenen als sehr grofs an; ihr wirklicher Werth bleibt unbestimmt. Dieser Annahme gemäfs müfsten am offenen Ende der Röhre die Maxima der Geschwindigkeit mit den Maximis der Verdichtung der Luft der Zeit nach zusammenfallen. Im Gegentheil wird die von uns anzustellende vollständigere Analyse zeigen, dafs beide nahehin um ein Viertel der Schwingungsdauer auseinanderfallen. ***Poisson***s Annahme beseitigt die genannten Uebelstände der früheren Theorien, indem bei seiner Hypothese allerdings Schall in den freien Raum übergeht, und deshalb die Schallschwingungen in der Röhre schnell erlöschen, sobald die erregende Kraft aufgehört hat zu wirken. Wie viel Schall aber in den freien Raum bei jeder Reflexion der Schallwellen übergeht, hängt von dem unbekannten Werthe der Constante k ab, und bleibt deshalb selbst unbekannt.

Andrerseits folgt aus ***Poisson***s wie aus der älteren Annahme, dafs die Flächen kleinster Bewegung (Knotenflächen) genau um eine Viertelwellenlänge vom offenen Ende der Röhre abstehen, was allen älteren und neueren Erfahrungen über die Höhe der durch Anblasen erzeugten Töne und der

---

*) Novi Commentarii Acad. Petrop. Tom. XVI, p. 347.

**) Mémoires de l'Académie des Sciences 1817 T. II, p. 305.

durch die Resonanz der Röhre verstärkten Töne widerspricht und durch die directen Versuche von ***Hopkins*** über die Lage der Knotenflächen widerlegt wird. Diese Flächen sind in offenen cylindrischen und prismatischen Röhren vom Ende der Röhre etwas weniger entfernt, als die Viertelwellenlänge beträgt. Gegen ***Poissons*** Versuch zu erklären, warum beim Anblasen beiderseits offener Röhren tiefere Töne entstehen, als seine Theorie erwarten läfst, haben schon ***Quet*** und ***Zamminer*** gegründete Bedenken erhoben. ***Poissons*** Formeln ergeben nämlich, dafs, wenn eine Bewegung von bestimmter Amplitude der Luft der Röhre in einem Knotenpunkte mitgetheilt wird, die Amplitude in den Schwingungsbäuchen sehr grofs wird, nämlich von derselben Ordnung wie ***Poissons*** Constante k. Daraus schliefst er, dafs für diesen Fall die Amplituden der Schwingung gröfser würden, als es die bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen gemachte Annahme unendlich kleiner Vibrationen erlaubte. Unter diesen Umständen sei also Schallbewegung unmöglich, und es könnten deshalb beim Anblasen der Röhre nur Töne entstehen, die sich dieser Grenze der Tonhöhe näherten, wirklich aber immer tiefer bleiben müfsten. Mathematisch ist dieser Schlufs unzulässig, denn wie grofs auch die übrigens durchaus unbekannt bleibende Gröfse k sein mag, so würde doch immer die Gröfse der mitgetheilten Amplituden so klein gewählt werden können, dafs die Bewegungsgleichungen der Schallbewegung anwendbar bleiben, und auch der Erfahrung widerspricht diese Darstellung. Allerdings tritt in den Versuchen von ***Hopkins*** die Schwierigkeit, der Luft der Röhre in einer Knotenfläche eine gegebene Bewegung mitzutheilen, deutlich in die Erscheinung, weil nämlich hier der Widerstand der Luft den Schwingungen der von ***Hopkins*** angewendeten schwingenden Platten am meisten hinderlich wird. Die lebendige Kraft der Bewegung, welche der schwingende Körper an die Luft abgeben mufs, um die starke Resonanz der Röhre zu unterhalten, wird hier am bedeutendsten, und wenn also der schwingende Körper nicht genügend viel lebendige Kraft erzeugen und abgeben kann, hört er auf zu schwingen. Wendet man dagegen Platten an, die von Stimmgabeln erschüttert werden, deren Vibrationen zu kräftig sind, um durch den Luftwiderstand erheblich verändert zu werden, so erhält man gerade in den Fällen die vollste und schönste Resonanz, wo die Platte in einer Knotenfläche der Röhre liegt, und nach ***Poisson*** die Resonanz unmöglich wäre. Aufserdem zeigt sich in den Versuchen von ***Hopkins*** die Schwierigkeit des Tönens der Platten gerade bei solchen Tönen, wie sie das Anblasen der Röhre giebt, aber nicht bei

den etwas höheren Tönen, welche ***Poisson*** als unmöglich betrachtet; diese kommen ohne Schwierigkeit zu Stande.

Es hat übrigens ***Quet****) diese Unzulänglichkeiten von ***Poisson***s Theorie, die nicht nothwendig aus seiner Fundamentalhypothese fliefsen, verbessert, während er sich übrigens dieser Hypothese anschliefst und ihre Richtigkeit wahrscheinlich zu machen sucht.

Hopkins**) hat die Beschränkung, welche in ***Poisson***s Grenzbedingung für das offene Ende der Röhre liegt, weggelassen und nur die Bedingung festgehalten, dafs der Druck am offenen Ende klein sein müsse, und dadurch die Möglichkeit offen behalten, in seinen Formeln die Uebereinstimmung mit den Thatsachen vollständig zu bewahren, aber freilich bleiben die Constanten, von denen die Lage der Knotenflächen und die Phasenunterschiede in den einzelnen Theilen der Röhre abhängen, in der Theorie unbekannt. Dagegen hat ***Hopkins*** eine Reihe wichtiger Versuche über die Lage der Knotenpunkte und die Tonhöhe ausgeführt, um eine jener Constanten wenigstens empirisch zu bestimmen.

Duhamel†) stellte sich zur Aufgabe, den Einflufs der der Axe nicht parallelen Bewegungen in Röhren zu ermitteln. Da er aber für das offene Ende sich mit der einfachen Annahme begnügt, dafs hier der Druck gleich Null sei, verschwindet der Einflufs, den die seitlichen Bewegungen der Lufttheile hier haben aus seiner Rechnung, und er kommt zu dem Schlusse, dafs die Differenz zwischen Theorie und Erfahrung nicht von dem Vorkommen solcher Bewegungen abhängt.

Masson††) endlich vertheidigt die Theorie von ***Poisson*** im Ganzen und sucht die Uebereinstimmung zwischen ihr und der Erfahrung durch eine neue Hypothese über die Bewegungsart der Luft in dem der Anblaseöffnung nächsten Abschnitte der Luftsäule herzustellen.

Uebrigens ist es klar, dafs, sobald die Gestalt des ganzen Luftraums, sowohl des inneren der Pfeife als des äufseren, gegeben ist — wir nehmen ihn im Folgenden immer als von festen Wänden begrenzt an — und wenn ferner die den Schall erregenden Kräfte gegeben sind, die Aufgabe mathe-

---

*) *Liouville* Journal, Tom. XX, p. 1.

**) Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Vol. V. — *Poggendorf*s Annalen Bd. XLIV, p. 246.

†) *Liouville* Journal, Tom. XIV, p. 49.

††) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tom. XL, p. 418.

matisch vollständig bestimmt ist, und keine weitere Hypothese über den Zustand der Luft am offenen Ende einer Pfeife zu machen ist. Eine richtig angestellte Analyse der Aufgabe mufs darüber vollständigen Aufschlufs geben.

Akustische Untersuchungen, bei denen ich über die bisher unerledigten Punkte der Theorie Auskunft brauchte, waren für mich die Veranlassung, die Untersuchung aufzunehmen, in welcher Weise sich ebene Schallwellen, die in der Tiefe einer cylindrischen Röhre erregt worden sind, bei ihrem Uebergange in den freien Raum erhalten, und ich habe gefunden, dafs die gegenwärtigen Hülfsmittel der Analysis ausreichen über die wesentlichen hier in Betracht kommenden Fragen genügende Auskunft zu geben, ohne dafs es nöthig ist irgend eine Hypothese zu machen.

Die Kräfte der Analyse sind in den bisherigen Arbeiten über Theorie des Schalles hauptsächlich darauf hin angespannt worden, den Verlauf einer ursprünglich vorhandenen Gleichgewichtsstörung in einer Luftmasse, die übrigens keiner Einwirkung fremder Kräfte unterliegt, zu bestimmen. Bei den Tönen der Pfeifen ist aber dieses Problem von verhältnifsmäfsig untergeordneter Wichtigkeit. Es handelt sich hauptsächlich darum, die Schwingungsform zu ermitteln, welche schliefslich sich dauernd herstellt, wenn die die Schwingungen erregende Ursache dauernd und gleichmäfsig fortwirkt. Es ist ferner unnöthig, dafs wir die Analyse durch Beibehaltung der willkürlichen Functionen verwickelter machen, welche die Form der ursprünglich erregten Schwingung ausdrücken. Wir werden vielmehr voraussetzen, dafs diese Vibrationen denen eines einfachen Tones von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, also von der Form $\cos(2\pi nt+c)$ sind. Die Willkürlichkeit der Form würde sich ja auch nach erfolgter Auflösung des Problems immer leicht herstellen lassen durch Zusammensetzung einer gröfseren Zahl von solchen einfachen Tönen.

Da somit die Form der Aufgabe etwas anders gefafst wird, als es in den akustischen Untersuchungen bisher geschehen war, ist es nöthig, in den ersten fünf Paragraphen einige allgemeine Untersuchungen über die Natur der hier vorkommenden Functionen vorauszuschicken. Es zeigt sich, dafs wir es dabei mit Functionen zu thun haben, die, wenn die Wellenlänge unendlich grofs wird, übergehen in die Formen der electrischen (oder magnetischen) Potentialfunctionen und dafs eine ganze Reihe der interessanten Eigenschaften, die für diese Functionen bekannt sind, auch für jene gelten. Da ich schon in einer früheren Arbeit für die Function, deren Differentialquotienten

nach drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen genommen die drei entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit geben, den Namen des ***Geschwindigkeitspotentials*** vorgeschlagen habe, so läfst sich diese Analogie auch weiter in der Bezeichnung festhalten. Den electrischen ***Massenpunkten*** entsprechen die ***Erregungspunkte*** des Schalls, der ***Masse*** der ersteren die ***Intensität*** der letzteren. Sind die letzteren continuirlich im Raume oder auf einer Fläche vertheilt, so läfst sich der Begriff der ***Dichtigkeit*** auf sie übertragen, und es lassen sich in beiden Fällen Beziehungen ganz analoger Art zwischen ihrer Dichtigkeit und den Differentialquotienten des Geschwindigkeitspotentials aufstellen, wie sie für die electrische Dichtigkeit und die Differentialquotienten der electrischen Potentialfunctionen gelten.

Den Hauptnutzen gewährt aber die Uebertragung des Theorems von *Green* *) auf die hier vorliegenden Verhältnisse, welches sich schon für die Theorie der Electricität und des Magnetismus so aufserordentlich fruchtbar gezeigt hat. Von allgemeinen Sätzen, die daraus herfliefsen, sollen nur folgende hervorgehoben werden: 1) ***Die Schallbewegung in jedem allseitig begrenzten Raume, welcher keine Erregungspunkte enthält, kann stets dargestellt werden als ausgehend von Erregungspunkten, die nur längs der Oberfläche des Raumes in einer oder zwei einander unendlich nahen Schichten ausgebreitet sind.*** 2) ***In jedem Raume, dessen sämmtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, können für das Geschwindigkeitspotential der Luftbewegung die analytischen Formen der electrischen Potentialfunctionen gesetzt werden, welche von jenem nur unendlich wenig unterschieden sind.*** 3) ***Wenn in einem theils von endlich ausgedehnten festen Wänden begrenzten, theils unbegrenzten Raume Schall im Punkte a erregt wird, so ist das Geschwindigkeitspotential in einem anderen Punkte b so grofs, als es in a sein würde, wenn dieselbe Schallerregung in b stattfände.***

Speciell werden in §. 1 die Bewegungsgesetze der Luft für die vorliegende Aufgabe umgeformt, in §. 2 die allgemeinen Formen des Geschwindigkeitspotentials für einen von Erregungspunkten freien Raum untersucht, in §. 3 die Beziehungen zwischen der Dichtigkeit continuirlich verbreiteter Erregungspunkte und dem Geschwindigkeitspotential festgestellt, in §. 4 die-

*) Dieses Journal Bd. XLIV, S. 360.

selben für Erregungspunkte, die continuirlich über eine Fläche verbreitet sind, und das Theorem von *Green* auf die Schallbewegung übertragen, in §. 5 endlich werden die Grenzbedingungen für weit von den Erregungspunkten entfernte Flächen aufgestellt, durch welche die Wellen in den unendlichen freien Raum hinauslaufen.

Nachdem so die wichtigsten allgemeinen Gesetze der electrischen Potentialfunctionen für die Lehre von den Schallwellen anwendbar gemacht worden sind, werden die allgemeinen Gesetze der Bewegung der Luft in Röhren mit offenen Mündungen durch wiederholte Anwendung des *Green*schen Satzes in §. 6 abgeleitet. Es wird hier zunächst vorausgesetzt, dafs die Röhren unendlich lang und cylindrisch von beliebigem Querschnitte seien. Nur in einer so kleinen Entfernung von ihrer Mündung, dafs deren Gröfse gegen die Wellenlänge vernachlässigt werden kann, darf die Röhre in beliebiger Weise von der cylindrischen Form abweichen, und z. B. trompetenförmig erweitert oder verengt sein. Ebenso werden die Dimensionen der Oeffnung als sehr klein gegen die Wellenlänge betrachtet. Da auch die Gestalt des äufseren Luftraums bestimmt sein mufs, wird angenommen, derselbe sei durch eine gegen die Axe der Röhre senkrechte Ebene einseitig begrenzt mit welcher auch die Ebene der Mündung zusammenfällt. Ueber die Bewegung wird vorausgesetzt, dafs Vibrationen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, irgendwo in der Röhre dauernd erregt werden, und dafs zwischen der Erregungsstelle und der Mündung ein Abschnitt der Röhre existire, in welcher die Bewegung nicht merklich von der ebener Wellen unterschieden sei. Mittelst des *Green*schen Satzes kann man nun, ohne die specielle Form der Mündung und der Luftbewegung in der Mündung zu kennen, gewisse Beziehungen herleiten zwischen diesen ebenen Wellen und den sich halbkugelförmig ausbreitenden Wellen in den entfernten Theilen des freien Raumes, und dadurch die bisher offen gebliebenen Fragen über den Einflufs des offenen Endes auf die ebenen Wellen beantworten, so weit sie allgemein beantwortet werden können.

Nehmen wir die Axe der Röhre als Axe der x, und die Ebene der Mündung als Ebene der yz, so dafs der freie Raum den positiven x, die Röhre den negativen entspricht, so ist bei passender Festsetzung des Anfangspunktes der Zeit t die allgemeine Form des Geschwindigkeitspotentials in dem Theile der Röhre, wo die Wellen eben sind, wenn wir die Wellenlänge

gleich $\frac{2\pi}{k}$ setzen,

$$\psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi nt) + \mathfrak{B}\cos kx\,.\,\sin(2\pi nt).$$

In den unendlich entfernten Theilen des freien Raumes dagegen, wo r die Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet, ist

$$\psi = M\frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r}.$$

Nach *Euler*s Theorie würde $B = \mathfrak{B} = 0$ sein, nach *Poissons* $B = 0$, $\mathfrak{B}$ eine unbestimmte kleine Gröfse, nach *Hopkins* sowohl B wie $\mathfrak{B}$ unbestimmte kleine Gröfsen, M bleibt in allen dreien unbekannt. Wir finden folgende Beziehungen, wenn wir unter Q die Gröfse des Querschnitts der Röhre verstehen, und die Fläche der Oeffnung gegen das Quadrat der Wellenlänge als verschwindend klein betrachten,

$$AQ = -2\pi M,$$
$$kAQ = -2\pi\mathfrak{B}.$$

Zwischen A und B läfst sich keine allgemeine, von der Form der Mündung unabhängige Beziehung aufstellen. Nur läfst sich nachweisen, dafs, wenn der Querschnitt der Röhre zur Fläche der Oeffnung ein endliches Verhältnifs hat, $\frac{B}{A}$ eine kleine Gröfse von derselben Ordnung wie die Dimensionen der Oeffnung ist, die aber jeden beliebigen Werth annehmen kann, wenn die Oeffnung sehr klein gegen den Querschnitt ist.

Wir setzen das Verhältnifs

$$\frac{B}{A} = -k\,\mathrm{tang}\,k\alpha$$

und nennen dann die Gröfse $\alpha - x_0$ die ***reducirte Länge*** des Stücks der Röhre, welches zwischen $x = 0$ und $x = -x_0$ liegt, die Gröfse α selbst die ***Differenz der wahren und reducirten Länge*** der Röhre.

Nachdem diese Beziehungen zwischen den Coefficienten ermittelt sind, wird in §. 7 die Form der Wellen in der Röhre näher bestimmt. ***Knotenflächen,*** d. h. Flächen kleinster Bewegung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre gleich einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge ist, ***Schwingungsbäuche*** oder Maxima der Bewegung, wo die reducirte Länge ein gerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist. Die ***Phasen*** der Bewegung sind am Orte der Maxima um die Zeit einer Viertel-Undulation von denen am Orte der Minima verschieden.

Die Knotenflächen sind zugleich Stellen des gröfsten Wechsels der Dichtigkeit, die Bäuche Stellen des kleinsten Wechsels der Dichtigkeit. In nächster Nähe der Knotenflächen und der Flächen stärkster Bewegung fällt die stärkste nach der Mündung gerichtete Geschwindigkeit der Zeit nach zusammen mit der stärksten Verdichtung. In den zwischenliegenden Abtheilungen der Röhre aber liegen beide um eine Viertel-Schwingungsdauer auseinander.

Wenn man die Lage des Geschwindigkeitsmaximum und die des Verdichtungsmaximum für einen jeden einzelnen Zeitmoment bestimmt, so findet man für die fortschreitenden Wellen in den entfernteren Stellen des freien Raumes bekanntlich, dafs beide mit der constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen fortschreiten, und dabei allmälig an Gröfse abnehmen. Auch in der Röhre bewegt sich das Geschwindigkeitsmaximum vorwärts gegen die Mündung hin, aber so dafs sein absoluter Werth am Ort der Bäuche sehr grofs, in den Knotenflächen sehr klein ist, und ferner so dafs die Geschwindigkeit seiner Fortbewegung in den Bäuchen sehr klein, in den Knoten sehr grofs ist, so dafs es überall, wo sich ein Bauch befindet, während einer halben Schwingungsdauer fast ganz still steht, um zu Ende dieser Zeit schnell auf den Ort des nächsten Bauches fortzuschreiten, an dem es dann wieder eben so lange fast stillsteht. Ebenso bewegt sich das Verdichtungsmaximum, nur dafs es in den Knotenflächen anhält und grofs ist, während es am Ort der Bäuche klein ist und schnell vorwärts eilt.

Die gewonnenen Resultate können weiter benutzt werden, um die Stärke der Resonanz und die Phasen der in der Luft erregten Schwingungen bei verschiedenen Erregungsweisen des Schalls genau zu bestimmen.

Wenn die Röhre in irgend einem Querschnitte durch eine feste Platte begrenzt ist, welche durch eine äufsere Kraft (z. B. eine aufgesetzte Stimmgabel) in eine schwingende Bewegung versetzt wird, deren Gröfse durch den Widerstand der Luft nicht merklich verändert werden kann, *so ist die Resonanz am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist, am schwächsten, wenn sie ein gerades Vielfache ist.* Im ersteren Falle, also beim Maximum der Resonanz, verhalten sich die Amplituden in den Schwingungsbäuchen zur Amplitude der schwingenden Schlufsplatte der Röhre, wie das durch $2\pi \cos k\alpha$ dividirte Quadrat der Wellenlänge zum Querschnitt der Röhre. Bei Röhren mit wenig verengter Mündung ist $\cos k\alpha$ nicht merklich von 1 unterschieden, die Gröfse

des Maximums der Resonanz also von der Form der Mündung ziemlich unabhängig, und die Stärke des Schalls im freien Raume ist bei solchen Röhren sowohl vom Querschnitt als von der Form der Mündung unabhängig. Bei stark verengter Mündung steigt die Resonanz in der Röhre und auch die Stärke des Schalls im freien Raume. Bei stärkster Resonanz ist die Phase der Bewegung in den Schwingungsbäuchen von den entsprechenden Phasen der mitgetheilten Bewegung der Zeit nach um eine Viertel-Schwingungsdauer verschieden.

Aehnliche Ergebnisse finden sich, wenn der Schall in der Röhre von einem in den entfernteren Theilen des freien Raumes befindlichen tönenden Punkte erregt wird, und für eine jede beliebige Lage des tönenden Punktes im freien Raume vor der Mündung der Röhre läfst sich durch das unter No. 3 als Folgerung des *Green*schen Theorems oben aufgeführte Reciprocitätsgesetz wenigstens das Verhältnifs der Stärke der Resonanz für verschiedene Röhrenlängen angeben. ***Auch in diesem allgemeinsten Falle findet sich, dafs die Resonanz der einerseits geschlossenen Röhre am stärksten ist, wenn ihre reducirte Länge ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist.***

Auf offene Röhren, deren beide Mündungen denselben Bedingungen unterliegen, wie die eine Mündung der bisher betrachteten Röhren, lassen sich die Resultate leicht übertragen. Ihre Resonanz ist am stärksten, wenn ihre reducirte Länge gleich einem Vielfachen der halben Wellenlänge ist.

In §. 8 werden Röhren betrachtet, welche Rotationskörper sind, und die Methoden aufgesucht, um Formen der Mündung zu finden, für welche die Bewegung der Luft vollständig angegeben werden kann.

In §. 9 werden die Rechnungen für die einfachsten Formen der Functionen, welche die Form der Mündung bestimmen, durchgeführt. Unter diesen Formen kommt eine vor, bei welcher die Differenz zwischen reducirter und wahrer Länge verschwindet. Ihre Mündung ist schwach trompetenförmig erweitert, so dafs die Fläche der Mündung doppelt so grofs ist als der Querschnitt des Cylinders. Eine andere dieser Formen, bei welcher die Weite der Oeffnung gleich der des Cylinders ist, weicht so aufserordentlich wenig von einem vollständigen Cylinder ab, dafs man für die meisten practischen Anwendungen die Differenz wird vernachlässigen dürfen. Der Abstand ihrer Wandung von der eines reinen Cylinders ist berechnet und in einer Tabelle zusammengestellt; mehr als $\frac{1}{100}$ des Radius beträgt diese Abweichung nur auf einem Streifen dicht an der Mündung, dessen Breite 0,54 des Radius beträgt,

und die gröfste Abweichung, die überhaupt vorkommt, ist $\frac{1}{50}$ des Radius. Die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge dieser Röhre beträgt $\frac{\pi}{2} = 0{,}785$ des Radius. Die eines vollständigen Cylinders mufs ein wenig gröfser sein. Die neuesten und sorgfältigsten experimentellen Bestimmungen der Gröfse dieser Differenz von *Wertheim* *) und *Zamminer* **) zeigen noch keine sehr grofse Uebereinstimmung unter einander, was vielleicht darin seinen Grund hat, dafs die Röhren durch Anblasen zum Tönen gebracht sind, wobei man zwar, wie die Erfahrung lehrt, im Allgemeinen Töne derselben Höhe bekommt, wie die Töne der stärksten Resonanz der Röhre, aber doch nicht genau weifs, wie weit die Tonhöhe durch kleine Modificationen des Anblasens verändert werden kann. Auch ist die Länge der Schallwellen nur schwer so genau zu bestimmen, dafs auch die verhältnifsmäfsig kleine Differenz der wahren und reducirten Länge der Röhren genau gefunden wird. *Wertheim* findet den Werth dieser Differenz, wenn sie in Theilen des Radius ausgedrückt wird, ziemlich unabhängig von dem Verhältnifs des Durchmessers zur Wellenlänge, und zwar bei beiderseits offenen Röhren für jedes Ende zwischen 0,560 und 0,819, Mittel $0{,}663\,R$, für einerseits gedeckte Röhren zwischen 0,638 und 0,862, Mittel $0{,}746\,R$, so dafs der theoretisch gefundene Werth $0{,}785\,R$ zwar gröfser ist als seine Mittelwerthe, aber doch noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsdifferenzen liegt. *Zamminer* findet dagegen einen stärkeren Einflufs der Tonhöhe. Bei offenen Röhren variirt der Werth der Differenz von 0,848 bis $0{,}493\,R$, während die Viertelwellenlänge von $20{,}9\,R$ auf $3{,}9\,R$ sich ändert, und bei geschlossenen Röhren variirt die Differenz zwischen 1,304 und $0{,}376\,R$, während die Viertelwellenlänge von $40{,}1\,R$ auf $7{,}03\,R$ sinkt. Dies stimmt nicht so gut mit der Theorie, welche so starke Aenderungen des Werthes $0{,}785\,R$, der für die tiefsten Töne gilt, bei veränderter Tonhöhe nicht erwarten läfst. Indessen sind bei den Röhren, deren Länge mehr als $30\,R$ beträgt, auch hier die Differenzen so gering, dafs Aenderungen der Schwingungszahl um ein Procent genügen würden, die Uebereinstimmung herzustellen, und bei verschiedener Stärke des Anblasens können leicht viel gröfsere Aenderungen eingetreten sein.

Endlich ist in §. 10 noch eine Aufgabe in ihren allgemeinen Zügen behandelt, welche bisher der theoretischen Bearbeitung unzugänglich gewesen

---

*) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tome XXXI, p. 394.
**) *Poggendorff*s Annalen der Physik XCVII, p. 183.

war, nämlich die Bestimmung der Luftschwingungen in solchen Hohlräumen, deren drei Dimensionen gleichmäfsig als verschwindend klein gegen die Wellenlänge betrachtet werden können, und die durch eine Oeffnung, deren Fläche selbst gegen die Oberfläche des Hohlraums verschwindend klein ist, mit der äufseren Luft communiciren. Es läfst sich die Höhe der Töne, für welche solche kugel- und flaschenförmige Pfeifen stärkste Resonanz geben, allgemein bestimmen. Ist die Oeffnung kreisförmig, und ihr Flächeninhalt s, das Volumen des Hohlkörpers S, die Schallgeschwindigkeit a, und die Schwingungszahl des Tones n, so ist nach der Theorie

$$n = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi^5}} \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Wählen wir als Längeneinheit das Millimeter, und setzen $a = 332260$, so ist

$$n = 56174 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Sondhaufs *) hat aus Versuchen die Schwingungszahl der durch Anblasen solcher Hohlkörper erhaltenen Töne in die Formel gebracht:

$$n = 52400 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Noch besser stimmt die Theorie mit den Versuchen von *Wertheim*, bei welchen das Verhältnifs der Fläche der Oeffnung zur Oberfläche des Hohlraums noch kleiner ist, als bei *Sondhaufs*, und die Uebereinstimmung ist desto gröfser, je kleiner jenes Verhältnifs ist.

Für elliptische Oeffnungen läfst sich der Werth von n ebenfalls bestimmen. Er wird etwas kleiner als für kreisförmige.

Auch für Hohlkörper mit zwei Oeffnungen läfst sich dieselbe Aufgabe lösen; das theoretische Gesetz stimmt auch hier mit den empirischen Formeln von *Sondhaufs* und seinen Versuchen überein.

§. 1.

Es sei innerhalb einer Luftmasse in dem Punkte, der durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, zur Zeit t der Druck gleich p, die den drei Coordinatenaxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit u, v, w, die Dichtigkeit h, und die Componenten der auf die Einheit der gasigen

*) *Poggendorffs* Annalen LXXXI, S. 235 und 347. Es ist übrigens in diesem Aufsatze die Bezeichnungsweise der französischen Physiker gebraucht, wonach die Schwingungszahlen der Töne doppelt so grofs werden als nach der deutschen Bezeichnung.

Masse wirkenden äufseren Kräfte X, Y und Z seien auszudrücken als Differentialquotienten einer Potentialfunction P, so dafs

$$X = \frac{dP}{dx}, \qquad Y = \frac{dP}{dy}, \qquad Z = \frac{dP}{dz}.$$

Die bekannten Bewegungsgleichungen für die inneren Punkte der Luftmasse sind demgemäfs:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{dP}{dx} - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}, \\ \frac{dP}{dy} - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}, \\ \frac{dP}{dz} - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dz} + w\frac{dw}{dz}, \\ -\frac{dh}{dt} = \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hv)}{dy} + \frac{d(hw)}{dz}. \end{cases}$$

Wenn Luft, ohne Wärme abzugeben, ihre Dichtigkeit ändert, ist

$$(1^a.)\quad p = b^2 h^\nu,$$

wo b eine Constante und $\nu = 1,42$ ist. Daraus folgt

$$(1^b.)\quad \begin{cases} \frac{dp}{dx} = b^2\nu h^{\nu-1}\frac{dh}{dx} \quad \text{und} \\ \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = b^2\nu h^{\nu-2}\frac{dh}{dx} = \frac{b^2\nu}{\nu-1}\frac{d(h^{\nu-1})}{dx}, \end{cases}$$

und ähnlich für die Differentialquotienten nach y und z.

Die Schallbewegung gehört zu denjenigen Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential zukommt, welches mit Φ bezeichnet werde, so dafs wir haben:

$$(1^c.)\quad u = \frac{d\Phi}{dx}, \qquad v = \frac{d\Phi}{dy}, \qquad w = \frac{d\Phi}{dz}.$$

Setzt man die Werthe aus $(1^b.)$ und $(1^c.)$ in die Gleichungen (1.), so haben die drei ersten derselben eine gemeinschaftliche Integralgleichung, nämlich:

$$(1^d.)\quad P - \frac{b^2\nu}{\nu-1}(h^{\nu-1} - h_0^{\nu-1}) = \frac{d\Phi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right\},$$

wo h_0 eine Function der Zeit sein kann, und die vierte Gleichung läfst sich auf die Form bringen:

$$(1^e.)\quad 0 = \frac{d(h^{\nu-1})}{dt} + (\nu-1)h^{\nu-1}\left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}\right] + \frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{dh^{\nu-1}}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dh^{\nu-1}}{dy} + \frac{d\Phi}{dz}\cdot\frac{dh^{\nu-1}}{dz}.$$

In dem Folgenden nehmen wir an, dafs die Geschwindigkeiten und Aenderungen der Dichtigkeit verschwindend klein seien. Setzen wir

$$h = h_0(1+\mathfrak{h}),$$

so betrachten wir also $\boldsymbol{P}$, $\mathfrak{h}$, sämmtliche Differentialquotienten von $\mathfrak{h}$, $\boldsymbol{P}$ und Φ als unendlich kleine Gröfsen, und vernachlässigen ihre höheren Potenzen. Dann werden die beiden Gleichungen (1^d.) und (1^e.), indem man $b^2\nu h_0^{\nu-1}=a^2$ setzt,

$$(1^f.) \qquad \boldsymbol{P} - a^2\mathfrak{h} = \frac{d\Phi}{dt},$$

$$(1^g.) \qquad 0 = \frac{d\mathfrak{h}}{dt} + \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}.$$

Indem man die erste Gleichung nach t differentiirt, kann man $\mathfrak{h}$ aus beiden eliminiren *) und erhält

$$(2.) \qquad 0 = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dt^2} + a^2\left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}\right].$$

Wir wollen im Folgenden nur Fälle behandeln, wo wir es mit einem einzigen gleichmäfsig anhaltenden Tone von n Schwingungen in der Zeiteinheit zu thun haben, und also Φ von der Form ist:

$$(2^a.) \qquad \Phi = \Psi' \cos(2\pi nt) + \Psi'' \sin(2\pi nt),$$

wo Ψ' und Ψ'' Functionen von x, y, z sind. Dabei kann die Gleichung (2.) nur bestehen, wenn auch $\boldsymbol{P}$ von der Form ist:

$$(2^b.) \qquad \frac{n}{2a^2}\boldsymbol{P} = -q'' \cos(2\pi nt) + q' \sin(2\pi nt).$$

Es zerfällt dann die Gleichung (2.) in die folgenden beiden:

$$(3.) \qquad \begin{cases} 0 = 4\pi q' + k^2\Psi' + \dfrac{d^2\Psi'}{dx^2} + \dfrac{d^2\Psi'}{dy^2} + \dfrac{d^2\Psi'}{dz^2}, \\ 0 = 4\pi q'' + k^2\Psi'' + \dfrac{d^2\Psi''}{dx^2} + \dfrac{d^2\Psi''}{dy^2} + \dfrac{d^2\Psi''}{dz^2}, \end{cases}$$

wo

$$(3^a.) \qquad k = \frac{2\pi n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

und λ die Wellenlänge ist.

---

*) Ich bemerke hier noch, dafs diese Elimination von h auch an den unverkürzten Gleichungen (1^d.) und (1^e.) vollzogen werden kann, und dafs man die Eliminationsgleichung, welche von der dritten Dimension in Bezug auf Φ und seine Differentialquotienten ist, ebenfalls mit Hülfe der hier folgenden Theoreme durch eine nach Sinus und Cosinus der Zeit fortlaufende Reihe integriren kann, deren Glieder von n^{ter} Dimension der kleinen Gröfsen den Combinationstönen n^{ter} Ordnung der primär angegebenen Töne entsprechen.

Zunächst werden wir uns mit der Integration dieser Differentialgleichungen zu beschäftigen haben. Aus ihrer Ableitung geht hervor, dafs q' und q'' Functionen der Coordinaten sind, welche sich nur an solchen Stellen des Raumes von 0 unterscheiden, wo veränderliche Kräfte auf die Luftmasse einwirken und Schallschwingungen erregen. In allen anderen Theilen der Luftmasse ist $q = 0$, und es sind daher die Functionen Ψ der Bedingung unterworfen

$$(3^b.) \qquad 0 = k^2\Psi + \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}.$$

Ich werde im Folgenden den immer wiederkehrenden Ausdruck

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}$$

nach dem Vorgang von ***Green*** mit $\nabla_x\Phi$, oder wo es unzweideutig ist, mit $\nabla\Phi$ bezeichnen.

§. 2.

Wir beginnen mit der Integration der einfacheren Gleichung

$$(3^b.) \qquad 0 = k^2\Psi + \nabla_x\Psi.$$

Ein bekanntes particulares Integral derselben ist

$$(4.) \qquad \Psi = \frac{A\cos(kr+g)}{r},$$

wenn wir mit A und g Constanten bezeichnen, mit r aber die Entfernung des Punktes x, y, z von einem festen Punkte α, β, γ, also

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

Es ist nämlich

$$(4^a.) \qquad \frac{d\Psi}{dx} = -\frac{A(x-\alpha)}{r^3}[\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)],$$

$$(4^b.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\Psi}{dx^2} = -A\left[\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3(x-\alpha)^2}{r^5}\right][\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)] \\ \qquad\qquad - \dfrac{Ak^2(x-\alpha)^2}{r^3}\cos(kr+g), \\ \dfrac{d^2\Psi}{dy^2} = -A\left[\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3(y-\beta)^2}{r^5}\right][\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)] \\ \qquad\qquad - \dfrac{Ak^2(y-\beta)^2}{r^3}\cos(kr+g), \\ \dfrac{d^2\Psi}{dz^2} = -A\left[\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3(z-\gamma)^2}{r^5}\right][\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)] \\ \qquad\qquad - \dfrac{Ak^2(z-\gamma)^2}{r^3}\cos(kr+g). \end{cases}$$

Wenn man die drei Gleichungen (4^b.) addirt, so erhält man:

$$\nabla_x \Psi = -Ak^2 \frac{\cos(kr+g)}{r} = -k^2\Psi,$$

vorausgesetzt, dafs nicht $r = 0$ und dabei die Werthe von $\frac{d^2\Psi}{dx^2}$, $\frac{d^2\Psi}{dy^2}$, $\frac{d^2\Psi}{dz^2}$ und Ψ unendlich werden. Mit Ausnahme des Punktes α, β, γ ist also dann die Diffentialgleichung (3^b.) mittelst des in Gleichung (4.) angenommenen Werthes von Φ durch den ganzen unendlichen Raum erfüllt.

Indem wir in Gleichung (4.) g entweder gleich Null oder gleich $-\frac{1}{2}\pi$ machen, erhalten wir zwei verschiedene Formen des particularen Integrals.

1) Wenn $g = -\frac{1}{2}\pi$, wird

$$(4^c.) \qquad \Psi = A\frac{\sin kr}{r},$$

und erhält für $r = 0$ den endlichen Werth Ak. Auch die Differentialquotienten bleiben endlich, es wird nämlich für $r = 0$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d^2\Psi}{dy^2} = \frac{d^2\Psi}{dz^2} = -\tfrac{1}{3}Ak^3,$$

wie man leicht sieht, wenn man $\cos kr$ und $\sin kr$ nach Potenzen der verschwindenden Gröfse r entwickelt. Daraus ergiebt sich für $r = 0$

$$\nabla_x \Psi + k^2\Psi = 0.$$

Die Function $\Psi = A\frac{\sin kr}{r}$ ist also ein solches particulares Integral der Gleichung (3^b.), welches im ganzen Raume und auch im Punkte α, β, γ gültig ist.

2) Wenn wir $g = 0$ setzen, wird

$$(4^d.) \qquad \Psi = A\frac{\cos kr}{r}$$

und für $r = 0$ unendlich grofs, ebenso wie seine Differentialquotienten. Die Gleichung (3^b.) wird also im ganzen Raume erfüllt, mit Ausnahme des Punktes α, β, γ.

Daraus ergiebt sich ferner leicht, dafs wenn wir setzen:

$$(4^e.) \qquad \Psi = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\left[A_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\sin kr}{r}\right],$$

wo bei den einzelnen Gliedern der Summe die Werthe von α, β, γ und A verschieden sind, die Gleichung (3^b.) erfüllt ist im ganzen Raume, ohne Ausnahme der Punkte α, β, γ.

Wenn wir aber setzen

$$(4^f.) \qquad \Psi = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\left[A_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\cos kr}{r}\right],$$

so ist die Gleichung (3^b.) im ganzen Raume erfüllt mit Ausnahme derjenigen Punkte, deren Coordinaten α, β, γ in der Summe vorkommen.

Denken wir uns die Punkte α, β, γ continuirlich neben einander im Raume vertheilt, so werden aus den Summen Integrale, und wir schliefsen, dafs die Function

$$(4^g.) \qquad \Psi = \iiint h_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\sin kr}{r}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

im ganzen Raume der Gleichung (3^b.) genügt, dagegen die Function

$$(4^h.) \qquad \Psi = \iiint h_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\cos kr}{r}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma$$

nur in denjenigen Theilen des Raumes, für welche $h = 0$. In beiden soll h eine willkürliche Function von α, β und γ bedeuten.

Wenn wir in der Gleichung (3^b.) $k = 0$ setzen, verwandelt sie sich in

$$(3^c.) \qquad \nabla_x \Psi = 0,$$

die bekannte Differentialgleichung für die Potentialfunctionen solcher Massen, welche in die Ferne mit anziehenden oder abstofsenden Kräften wirken, deren Intensität dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die verschiedenen Formen für das Integral Ψ der Gleichung (3^b.), welche wir aufgestellt haben, verwandeln sich, wenn sie $\frac{\sin kr}{r}$ enthalten, in

$$\Psi = \text{Constans},$$

welches Integral im ganzen Raume ohne Ausnahme eines Punktes der Gleichung (3^c.) genügt, oder, wenn sie $\frac{\cos kr}{r}$ enthalten, in

$$\Psi = \Sigma\left[\frac{A}{r}\right]$$

oder

$$\Psi = \iiint \frac{h}{r}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

welche beiden Formen in denjenigen Punkten des Raumes nicht genügen, in denen anziehende oder abstofsende Masse vorhanden ist, in denen also A oder h nicht gleich Null ist.

Da die Gleichung

$$0 = k^2\Psi + \nabla_x \Psi$$

im ganzen mit Luft gefüllten Raume erfüllt sein mufs mit Ausnahme solcher Stellen, wo veränderliche Kräfte auf die Luft wirken, schliefsen wir, dafs in den Formen des Integrals (4^d.), (4^f.), (4^h.) diejenigen Punkte und Theile des Raumes, in denen die Gleichung (3^b.) nicht erfüllt ist, ***Erregungspunkte*** des Schalls sind. Wir wollen sie auch als solche bezeichnen. Es mag in den Formen des Integrals (4^d.) und (4^f.) die Constante A die ***Intensität*** des betreffenden Erregungspunktes heifsen, und in (4^h.), wo die Erregungspunkte continuirlich durch den Raum vertheilt gedacht sind, nennen wir die Constante h ihre ***Dichtigkeit.*** Bei electrischen Problemen, wo $k = 0$, würden die Erregungspunkte den Massenpunkten, die Intensität der Masse, die Dichtigkeit der Dichtigkeit entsprechen. Da die Functionen Ψ die Bedeutung von Geschwindigkeitspotentialen haben, wollen wir, entsprechend dem Sprachgebrauch in der Lehre von der Electricität und dem Magnetismus, eine solche Summe wie (4^f.), welche sich auf eine bestimmte Zahl von Punkten α, β, γ bezieht, das ***Geschwindigkeitspotential dieser bestimmten Erregungspunkte*** nennen. Die Gleichung (3^b.) wird also erfüllt durch die ganze Ausdehnung eines gegebenen Raumes S, wenn Ψ das Geschwindigkeitspotential aufserhalb S gelegener Erregungspunkte ist.

§. 3.

Wenn wir nun zur Betrachtung der Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q$$

übergehen, so ist zunächst zu bemerken, dafs für $k = 0$, diese Gleichung in

$$(3^d.) \qquad \nabla_x \Psi = -4\pi q$$

übergeht, deren Integral bekanntlich ist:

$$\Psi = \iiint \frac{q_{\alpha,\beta,\gamma}}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma + \Phi,$$

worin Φ eine Function bezeichnet, für welche in dem ganzen Theile des Raumes, wo die Gleichung (3^d.) erfüllt sein soll, $\nabla \Phi = 0$ ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs in ganz analoger Weise das Integral der Gleichung

$$(3.) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q$$

ist:

$$(5.) \qquad \Psi = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\cos kr}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma + \Phi,$$

wo Φ eine Function bezeichnet, für welche in den Theilen des Raumes, wo

die Gleichung (4.) gültig sein soll,

$$\nabla_x \Phi + k^2 \Phi = 0.$$

Um die durch das Zeichen $\nabla_x \Psi$ vorgeschriebenen Differentiationen unter dem Integralzeichen in (5.) vornehmen zu können, denke ich mir den ganzen Raum durch eine den Punkt x, y, z in unendlich kleiner Entfernung umgebende rings geschlossene Fläche getheilt, und nenne den unendlich kleinen inneren Raum S_0, den umgebenden äufseren S_1. Das in dem Werthe von Ψ (Gleichung (5.)) enthaltene Integral zerlege ich dem entsprechend in zwei Theile, von denen der eine Ψ_0 der Integration über S_0, der andere Ψ_1 der über S_1 entspricht.

Es ist also

$$(5^a.) \qquad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Phi.$$

Da Ψ_1 ein Potential von Erregungspunkten, die aufserhalb S_0 liegen, für einen innerhalb S_0 enthaltenen Punkt ist, so ist

$$\nabla_x \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = 0,$$

ebenso

$$\nabla_x \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

also

$$(5^b.) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = \nabla_x \Psi_0 + k^2 \Psi_0.$$

Nun setze ich

$$f_r = \frac{\cos kr}{r} - \frac{1}{r},$$

welche Gröfse f_r für $r=0$ auch gleich Null wird, während aus den Gleichungen (4^b.) sich ergiebt, dafs für sehr kleine Werthe von r $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dy^2}$ und $\frac{d^2 f}{dz^2}$ sich auf Gröfsen von der Dimension $\frac{1}{r}$ reduciren, und für $r=0$

$$\nabla_x f_r = -\frac{k^2}{r}$$

wird. Ferner setze ich

$$\Psi' = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} f_r \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

$$\Psi'' = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

beide Integrale über den unendlich kleinen Raum S_0 ausgedehnt, so dafs

$$(5^c.) \qquad \Psi_0 = \Psi' + \Psi''.$$

Um zu ermitteln, von welcher Gröfsenordnung Ψ', Ψ'' und $\nabla\Psi'$ sind, führe

man statt der rechtwinkligen Coordinaten α, β und γ Kugelcoordinaten ein, indem man setzt:

$$\begin{aligned} x-\alpha &= r\cos\omega, \\ y-\beta &= r\sin\omega\cos\vartheta, \\ z-\gamma &= r\sin\omega\sin\vartheta, \end{aligned}$$

dann wird

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma = r^2 \sin\omega\, d\omega\, d\vartheta\, dr.$$

Ist also die mit $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ unter dem Integrationszeichen multiplicirte Gröfse für $r=0$ entweder endlich, wie qf_r, oder von der Ordnung $\frac{1}{r}$, wie $\frac{q}{r}$ und $\nabla_x f_r$, welches gleich $-\frac{k^2}{r}$ ist, so wird die zu integrirende Gröfse unendlich klein und über einen unendlich kleinen Raum integrirt. Daher werden die Gröfsen Ψ', Ψ'', Ψ_0 (wegen (5^c.)) und $\nabla_x^2 \Psi'$ unendlich klein. Dagegen ist $\nabla_x \Psi''$ endlich und hat den bekannten Werth

$$\nabla_x \Psi'' = -4\pi q.$$

Folglich wird aus (5^b.) und (5^c.)

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = \nabla_x \Psi' + \nabla_x \Psi'' + k^2 \Psi' + k^2 \Psi''$$

und, indem wir die unendlich kleinen Gröfsen gegen die endliche vernachlässigen,

$$(3.) \qquad \nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q,$$

was zu erweisen war.

§. 4.

Es läfst sich für die hier untersuchten Formen von Geschwindigkeitspotentialen ferner dieselbe Relation erweisen, welche für die Potentialfunctionen electrischer Massen an solchen Flächen stattfindet, die mit endlichen Massen in unendlich dünner Schicht belegt sind.

Setzen wir

$$(6.) \qquad \Psi = \int p \frac{\cos kr}{r}\, d\omega,$$

wo $d\omega$ das Flächenelement einer beliebigen Fläche Ω bezeichnet und p eine Function, die sich in der Fläche continuirlich ändert, und untersuchen die ersten Differentialquotienten von Ψ für solche Punkte x, y, z des Raumes, welche der Fläche Ω unendlich nahe liegen.

Wir setzen wieder

$$\frac{\cos kr}{r} = f_r + \frac{1}{r},$$

$$\Psi = \Psi' + \Psi'',$$

$$\Psi' = \int p f_r d\omega,$$

$$\Psi'' = \int p \frac{1}{r} d\omega.$$

Ψ' ist jedenfalls endlich, wenn p und die Gröfse der Fläche Ω endlich sind, da f_r immer endlich ist. Dafs Ψ'' unter denselben Bedingungen endlich ist, ist aus der Theorie der electrischen Potentialfunctionen bekannt, ebenso dafs Ψ'' auf beiden Seiten dicht an der Fläche dieselben Werthe hat. Dafs letzteres auch mit Ψ' und also auch mit Ψ der Fall sei, ist leicht zu ersehen, da f_r, auch wenn man durch die Schicht selbst hindurchgeht, sich immer nur continuirlich ändern kann. Dagegen wissen wir, dafs die Differentialquotienten von Ψ'' an der Fläche einen endlichen Sprung ihres Werthes erleiden, während leicht zu erkennen ist, dafs die von Ψ' an der Fläche continuirlich sein müssen. Denken wir uns durch eine geschlossene Linie, die in unendlich kleiner Entfernung den Fufspunkt des von x, y, z auf die Fläche Ω gefällten Lothes umgiebt, ein Stück Ω_0 aus der Fläche herausgeschnitten und das Integral $\int p f_r d\omega$ getheilt in Ψ_0', welches über die Fläche Ω_0, und Ψ_1', welches über den Rest der Fläche ausgedehnt ist, so dafs

$$\Psi' = \Psi_0' + \Psi_1'.$$

Nun ist die Gröfse

$$\frac{df_r}{dx} = -\frac{k^2}{2}\frac{x-\alpha}{r}$$

für unendlich kleine Werthe von r, bleibt also endlich, macht aber einen Sprung, wenn man von positiven Werthen von $x-\alpha$ durch $r=0$ nach negativen übergeht, ist dagegen continuirlich, wenn man nicht durch $r=0$ hindurchgeht. Letzteres geschieht nun keinenfalls, wenn man in Ψ_1' die Werthe von x, y, z sich ändern läfst. Dagegen ist $\frac{d\Psi_0'}{dx}$, wo allerdings ein Sprung eintreten würde, unendlich klein als das Integral einer endlichen Gröfse über eine unendlich kleine Fläche genommen, und wir können deshalb seinen Werth gegen $\frac{d\Psi_1'}{dx}$ und $\frac{d\Psi''}{dx}$ vernachlässigen. Folglich sind die Differentialquotienten von Ψ', welches gleich $\Psi_0' + \Psi_1'$ ist, continuirlich, und die von Ψ müssen an

der Fläche Ω einen Sprung von derselben Gröfse wie die von Ψ'' machen. Bezeichnen wir die von der Fläche ab nach beiden Seiten hingehenden Normalen mit n_i und n_{ii}, so ist bekanntlich

$$\frac{d\Psi''}{dn_i} + \frac{d\Psi''}{dn_{ii}} = -4\pi p,$$

und daraus folgt, dafs auch

$$(6^a.) \qquad \frac{d\Psi}{dn_i} + \frac{d\Psi}{dn_{ii}} = -4\pi p$$

sei, was zu beweisen war.

Man kann ferner den für die Lehre von den electrischen und magnetischen Potentialfunctionen so äufserst fruchtbaren Lehrsatz von *Green* *) auch auf die hier vorliegenden Functionen mit dem gröfsten Vortheil anwenden.

Wenn Ψ und Φ zwei Functionen sind, welche innerhalb eines abgegrenzten Raumes S eindeutig und stetig sind, d. h. überall endliche erste Differentialquotienten haben, so ist nach jenem Satze von *Green*

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi \nabla\Phi \, dx\, dy\, dz = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi \nabla\Psi \, dx\, dy\, dz,$$

wo $d\omega$ ein Flächenelement der Oberfläche von S, n die nach innen gerichtete Normale bedeutet, und die Integrationen nach $d\omega$ über die ganze Oberfläche von S, die nach $dx\,dy\,dz$ durch das ganze Innere von S auszudehnen sind. Wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung addiren $k^2 \iiint \Psi\Phi \, dx\, dy\, dz$, so bringen wir den Satz in die Form, welche wir hier brauchen

$$(7.) \qquad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi(\nabla\Phi + k^2\Phi)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi(\nabla\Psi + k^2\Psi)\, dx\, dy\, dz.$$

Sind Ψ und Φ dargestellt als Geschwindigkeitspotentiale von Erregungspunkten, die theils innerhalb, theils aufserhalb des Raumes S continuirlich mit der Dichtigkeit q und p verbreitet sind, so ist nach Gleichung (3.), (5.) und (7.)

$$(7^a.) \qquad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Psi p \, dx\, dy\, dz$$
$$= \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Phi q \, dx\, dy\, dz.$$

---

*) Dieses Journal Bd. 44, S. 360.

Sind Ψ und Φ Geschwindigkeitspotentiale von aufserhalb S gelegenen Erregungspunkten, so wird

$$(7^b.) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega.$$

Green hat bewiesen, dafs eine solche Gleichung wie (7^a.) auch richtig bleibt, wenn in einem unendlich kleinen Raumelement ds des Raumes S die Dichtigkeit p einen so grofsen constanten Werth annimmt, dafs $p\,ds$ einer endlichen Gröfse A gleich wird, obgleich dann Φ an dieser Stelle nicht stetig bleibt, sondern unstetig wird, wie $\frac{A}{r}$. Nehmen wir an, dafs Φ das Geschwindigkeitspotential der in dem unendlich kleinen Raumelemente ds, dessen Coordinaten α, β, γ seien, mit der gleichmäfsigen Dichtigkeit p vertheilten Erregungspunkte sei, während p überall sonst gleich Null ist, so dafs also Φ in endlicher Entfernung vom Punkte α, β, γ den Werth habe:

$$\Phi = A \frac{\cos kr}{r},$$

so reducirt sich das dreifache Integral der linken Seite der Gleichung (7^a.), indem wir den Werth, welchen Ψ im Punkte α, β, γ hat, mit Ψ_α bezeichnen, auf

$$\Psi_\alpha \int p\,ds = A\Psi_\alpha.$$

Die Gleichung (7.) wird also

$$(7^c.) \quad -4\pi\Psi_\alpha = \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega - \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega + \iiint (\nabla_x \Psi + k^2\Psi) \frac{\cos kr}{r} dx\,dy\,dz.$$

Somit ist die Function Ψ, welche wir nur der Bedingung unterworfen hatten, eindeutig und stetig zu sein, die übrigens ganz beliebiger Art sein kann, auf die Form unserer Geschwindigkeitspotentiale gebracht. Ist übrigens innerhalb des ganzen Raumes S

$$\nabla_x \Psi + k^2\Psi = 0,$$

so wird die Gleichung (7^c.):

$$(7^d.) \quad \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega - \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega = 4\pi\Psi_\alpha.$$

Nun ist das Integral $\int \frac{d\Psi}{dn} \frac{\cos kr}{r} d\omega$ das Potential einer Schicht von Erregungspunkten, welche an der Oberfläche von S ausgebreitet ist und die Dichtigkeit $\frac{d\Psi}{dn}$ hat. Das andere Integral können wir aber betrachten als das

Potential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die derselben Fläche anliegen. Denken wir die eine Schicht mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{\varepsilon}\Psi$ auf der äufseren Seite der Oberfläche von S in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche ausgebreitet, die andere mit der Dichtigkeit $+\frac{1}{\varepsilon}\Psi$ auf der inneren Seite der Oberfläche von S auch in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche entfernt, so wird das Potential dieser Schichten sein: $\int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega$. ***Somit läfst sich jede stetige und eindeutige Function Ψ, welche in allen Theilen des Raumes S der Gleichung genügt:***

$$\nabla\Psi + k^2\Psi = 0,$$

als Geschwindigkeitspotential von Erregungspunkten ausdrücken, die blos längs der Oberfläche von S ausgebreitet sind.

Hier aber hört die Aehnlichkeit mit den electrischen Potentialfunctionen auf, indem diese letzteren sich stets ausdrücken lassen als Potentialfunctionen einer *einfachen* Schicht von Electricität an der Oberfläche des Raumes, was bei unseren Potentialen zwar im Allgemeinen auch der Fall ist, aber für eine unendlich grofse Zahl von bestimmten Werthen von k für eine jede gegebene geschlossene Oberfläche Ausnahmen erleidet. Es sind dies nämlich diejenigen Werthe von k, die den eigenen Tönen der eingeschlossenen Luftmasse entsprechen.

Man kann sich davon leicht an einem Beispiele überzeugen, indem man das Potential für eine gleichmäfsig und continuirlich mit Erregungspunkten belegte Kugelschaale berechnet.

Wenn sämmtliche Dimensionen des Raumes S sehr klein gegen die Wellenlänge sind, kann kr gegen 1 vernachlässigt werden, so oft r die Entfernung zweier innerhalb S gelegener Punkte ist. Unter diesen Umständen wird die Gleichung (7^d.)

$$4\pi\Psi_a = \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega - \int \frac{d\Psi}{dn}\frac{d\omega}{dr}.$$

Bei dieser Weglassung unendlich kleiner Gröfsen wird also Ψ eine Function, welche der Gleichung $\nabla\Psi = 0$ im Raume S genügt, und es folgt daraus, dafs man in Räumen, deren Dimensionen gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, statt der Functionen, die der Gleichung $\nabla\Psi + k^2\Psi = 0$ genügen, stets unendlich wenig davon unterschiedene Functionen finden kann, die der Gleichung $\nabla\Psi = 0$ genügen.

Wendet man die Gleichung (7^d.) auf theilweis zusammenstofsende Räume $S_{'}$ und $S_{''}$ an, indem man die Elemente ihrer nicht gemeinsamen Oberfläche mit $d\omega_{'}$ und $d\omega_{''}$, die des gemeinsamen Stückes ihrer Oberfläche mit $d\omega_0$ bezeichnet, unter $n_{'}$ die nach dem Inneren von $S_{'}$, unter $n_{''}$ die nach dem Inneren von $S_{''}$ gerichteten Normalen dieser Flächenelemente versteht, so hat man,

$$\text{wenn innerhalb } S_{'} \quad \nabla \Psi_{'} + k^2 \Psi_{'} = 0,$$
$$\text{und innerhalb } S_{''} \quad \nabla \Psi_{''} + k^2 \Psi_{''} = 0,$$

der Punkt α, β, γ, von dem die Entfernungen r gerechnet werden, aber innerhalb $S_{'}$ liegt, und wir unter dem Integralzeichen $[d\omega_{'} + d\omega_0]$ schreiben, wo die Integration über sämmtliche Elemente $d\omega_{'}$ und sämmtliche $d\omega_0$ ausgedehnt werden soll,

$$4\pi \Psi_{'\alpha} = \int \Psi_{'} \frac{d}{dn_{'}} \left(\frac{\cos kr}{r}\right) [d\omega_{'} + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_{'}}{dn_{'}} \frac{\cos kr}{r} [d\omega_{'} + d\omega_0],$$
$$0 = \int \Psi_{''} \frac{d}{dn_{''}} \left(\frac{\cos kr}{r}\right) [d\omega_{''} + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_{''}}{dn_{''}} \frac{\cos kr}{r} [d\omega_{''} + d\omega_0].$$

Wenn nun an der gemeinsamen Trennungsfläche beider Räume

$$\Psi_{'} = \Psi_{''}, \quad \frac{d\Psi_{'}}{dn_{'}} = \frac{d\Psi_{''}}{dn_{'}} = -\frac{d\Psi_{''}}{dn_{''}}$$

ist, so giebt die Addition beider Gleichungen, da $dn_{'} = -dn_{''}$,

$$4\pi \Psi_{'\alpha} = \int \Psi_{'} \frac{d}{dn_{'}} \left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_{'} - \int \frac{d\Psi_{'}}{dn_{'}} \frac{\cos kr}{r} d\omega_{'}$$
$$+ \Psi_{''} \frac{d}{dn_{''}} \left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_{''} - \int \frac{d\Psi_{''}}{dn_{''}} \frac{\cos kr}{r} d\omega_{''}.$$

Die Function $\Psi_{'}$ erscheint also hier als Potential von Punkten ausgedrückt, die an der nicht gemeinsamen Oberfläche der Räume $S_{'}$ und $S_{''}$ liegen, während die Punkte der gemeinsamen Trennungsfläche ganz aus dem Integral verschwinden. Genau denselben Ausdruck erhält man aber für $\Psi_{''}$, wenn man den Punkt α, β, γ in den Raum $S_{''}$ verlegt. Es sind also in diesem Falle $\Psi_{'}$ und $\Psi_{''}$ Potentiale derselben aufserhalb des gemeinsamen Raumes $S_{'}$ und $S_{''}$ liegenden Erregungspunkte, und beide Functionen müssen continuirlich in einander übergehen.

Wenn wir also im Folgenden für das Geschwindigkeitspotential in verschiedenen Theilen eines zusammenhängenden Luftraumes verschiedene Ausdrücke $\Psi_{'}$ und $\Psi_{''}$ werden wählen müssen, wird die Continuität an der Grenz-

fläche hergestellt sein, wenn in allen Punkten derselben

$$\Psi_{\prime} = \Psi_{\prime\prime} \quad \text{und} \quad \frac{d\Psi_{\prime}}{dn_{\prime}} = \frac{d\Psi_{\prime\prime}}{dn_{\prime}} \quad \text{oder} \quad = -\frac{d\Psi_{\prime\prime}}{dn_{\prime\prime}}.$$

§. 5.

Wir müssen noch die Grenzbedingungen aufstellen für solche unendlich entfernt gedachte Oberflächen, durch welche Schallwellen in den unendlichen Raum hinauslaufen, und jenseits welcher es keine Erregungspunkte mehr giebt. Wenn von einem einzelnen Punkte aus in der vorher unbewegten Luft eine Erschütterung ausgeht, so hat das Geschwindigkeitspotential bekanntlich die Form $\frac{1}{r} F_{(r-at)}$, wo F eine willkührliche Function, a die Schallgeschwindigkeit, r die Entfernung vom Erregungspunkte α, β, γ bezeichnet. Soll F einer einfach periodischen Bewegung von n Perioden in der Secunde entsprechen, so müssen wir ihm die Form geben $\frac{1}{r} \cos[kr - 2\pi nt + c]$, wo $2\pi n = ak$, wie in (3ª.) festgesetzt ist. Haben wir nun eine beliebige Anzahl Schall erregender Punkte in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, so dafs das Geschwindigkeitspotential Ψ von der Form wird:

$$(8.) \qquad \Psi = \Sigma\left\{A_a \frac{\cos[kr_a - 2\pi nt + g_a]}{r_a}\right\},$$

wo r_a die Entfernung vom Punkte a, A_a und g_a Constanten bezeichnen, die für die verschiedenen Punkte verschieden sind, und setzen wir die Coordinaten x, y, z des Punktes, in dem die Schallbewegung bestimmt werden soll, gleich

$$\varrho\cos\omega, \quad \varrho\sin\omega\cos\vartheta, \quad \varrho\sin\omega\sin\vartheta,$$

für den Punkt a aber gleich

$$\alpha_a, \qquad \beta_a, \qquad \gamma_a,$$

so ist

$$r = \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega\cos\vartheta + \gamma\sin\omega\sin\vartheta) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

und für unendlich grofse Werthe von ϱ wird

$$r = \varrho - \alpha\cos\omega - \beta\sin\omega\sin\vartheta - \gamma\sin\omega\sin\vartheta,$$

indem wir die weiteren Glieder vernachlässigen, welche ϱ im Nenner enthalten und deshalb unendlich klein werden. Danach wird nun der Werth von Ψ, wenn wir nur die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ beibehalten,

$$(8^a.)\quad \Psi = \frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho} \Sigma\{A_a \cos[k(\alpha_a \cos\omega + \beta_a \sin\omega\cos\vartheta + \gamma_a \sin\omega\sin\vartheta) - g_a]\}$$
$$+ \frac{\sin(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho} \Sigma\{A_a \sin[k(\alpha_a \cos\omega + \beta_a \sin\omega\cos\vartheta + \gamma_a \sin\omega\sin\vartheta) - g_a]\}.$$

Die beiden Summen in diesem Ausdruck sind von ϱ unabhängig, dagegen Functionen von ω und ϑ. Wir können also schliefslich für unendlich grofse Werthe von ϱ Ψ auf die Form bringen:

$$(8^b.)\qquad \Psi = \mathfrak{A} \frac{\cos[k\varrho - 2\pi nt + \mathfrak{c}]}{\varrho},$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ Functionen von ω und ϑ sind.

Dieselbe Betrachtung läfst sich auch anwenden, wenn in der Nähe der Schall erregenden Punkte begrenzte feste Körper vorhanden sind in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, insofern man an der Oberfläche dieser Körper periodisch wirkende Kräfte annehmen kann, welche die Bewegung der Lufttheilchen senkrecht gegen ihre Oberfläche zu vernichten im Stande sind. Ist der Raum durch irgend eine unendlich ausgedehnte Fläche nach einer Richtung begrenzt, so ist diese Betrachtung nicht unmittelbar anwendbar, weil man dann periodisch wirkende Kräfte an dieser Fläche bis in unendliche Entfernung hinaus haben würde. Wohl aber läfst sich einfach der Fall behandeln, wo der Raum durch eine unendliche Ebene begrenzt ist, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Man braucht sich zu den Erregungspunkten nur noch ihre Spiegelbilder hinter der Ebene hinzu zu denken, von beiden zusammen das Geschwindigkeitspotential zu nehmen, so erfüllt dies die Bedingung, dafs an der Ebene $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ sei, und es lassen sich auf ein solches Geschwindigkeitspotential dieselben Betrachtungen anwenden, als wenn nur endliche feste Körper in der Nähe wären.

Unter diesen Umständen ist also die Grenzbedingung, welche für die unendlich entfernten Theile des freien Raumes aufzustellen ist, die, dafs das Bewegungspotential Ψ dort die in Gleichung $(8^b.)$ angegebene Form habe.

Setzen wir jetzt voraus, dafs Ψ das Geschwindigkeitspotential eines Schallwellenzuges sei, der in dem Punkte a erregt wird, in dessen Nachbarschaft sich eine beliebige Anzahl fester begrenzter Körper befinden möge, so dafs nur an dieser Stelle Ψ unendlich werde, wie

$$A \frac{\cos kr_a}{r_a} \cos(2\pi nt)$$

sonst überall endlich und stetig bleibe, und in der unendlich grofsen Entfernung ϱ

von derselben Form wie in Gleichung (8^b.) sei. Aufserdem möge an der Oberfläche der festen Körper die Gleichung $\frac{d\Psi}{dn} = 0$ stattfinden. Es sei ferner Φ das Geschwindigkeitspotential einer Schallbewegung, die im Punkte b erregt worden ist, so dafs in unendlich kleiner Entfernung von b Φ unendlich wird, wie

$$\Phi = A\frac{\cos kr_b}{r_b}\cos(2\pi nt),$$

in unendlicher Entfernung ϱ dagegen

$$\Phi = \mathfrak{B}\frac{\cos[k\varrho - 2\pi nt + \mathfrak{d}]}{\varrho}$$

sei, wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{d}$ nach verschiedenen Richtungen vom Anfangspunkte der Coordinaten aus verschiedene Werthe haben; übrigens mufs Φ wie Ψ überall sonst endlich sein, und an der Oberfläche der festen Körper $\frac{d\Phi}{dn} = 0$.

Wir wenden nun die Gleichung (7.) auf einen Raum S an, der durch eine mit dem unendlich grofsen Radius ϱ um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebene Kugelschaale umschlossen ist, von welchem wir nur ausschliefsen alle die Theile, welche durch die festen Körper eingenommen sind. Für die Integration an den Punkten a und b, wo Ψ und Φ unendlich grofs werden, findet dieselbe Betrachtung wie bei Gleichung (7^c.) statt. Wir erhalten

$$(9.)\quad \int \Psi\frac{d\Phi}{dn}d\omega - \int \Phi\frac{d\Psi}{dn}d\omega = 4\pi A[\Psi_b\cos(2\pi nt) - \Phi_a\cos 2\pi nt],$$

wo Ψ_b den Werth von Ψ im Punkte b, und Φ_a den von Φ im Punkte a bezeichnet. Die Integration nach $d\omega$ ist sowohl über die Oberflächen der vorhandenen festen Körper auszudehnen, an denen aber $\frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Psi}{dn} = 0$, so dafs diese Theile wegfallen, als auch über die Oberfläche der Kugel. Hier wird nun

$$\Psi\frac{d\Phi}{dn} - \Phi\frac{d\Psi}{dn} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}k\sin(\mathfrak{d} - \mathfrak{c}).$$

Wenn wir nun bedenken, dafs Ψ und Φ von der Form sein müssen:

$$\Psi = \Psi'\cos(2\pi nt) + \Psi''\sin(2\pi nt),$$
$$\Phi = \Phi'\cos(2\pi nt) + \Phi''\sin(2\pi nt),$$

wo Ψ', Φ', Ψ'' und Φ'' von der Zeit unabhängige Gröfsen sind, so wird

$$\Psi_b\cos(2\pi nt) - \Phi_a\cos(2\pi nt)$$
$$= \tfrac{1}{2}[\Psi'_b - \Phi'_a] + \tfrac{1}{2}[\Psi'_b - \Phi'_a]\cos(4\pi nt) + \tfrac{1}{2}[\Psi''_b - \Phi''_a]\sin(4\pi nt).$$

Da nun die Gleichung (9.) für jeden Werth von t erfüllt sein mufs, so mufs

einzeln gleich sein:

$$\Psi'_b - \Phi'_a = 0,$$
$$\Psi''_b - \Phi''_a = 0,$$
$$\int \mathfrak{A}\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{d}-\mathfrak{c})\,d\omega = 0,$$

also auch

$$(9^a.)\quad \Psi_b = \Psi'_b\cos(2\pi nt) + \Psi''_b\sin(2\pi nt) = \Phi'_a\cos(2\pi nt) + \Phi''_a\sin(2\pi nt) = \Phi_a.$$

Daraus geht der wichtige Satz hervor: ***Wenn in einem mit Luft gefüllten Raume, der theils von endlich ausgedehnten festen Körpern begrenzt theils unbegrenzt ist, im Punkte a Schallwellen erregt werden, so ist das Geschwindigkeitspotential derselben in einem zweiten Punkte b ebenso grofs, als es in a sein würde, wenn nicht in a, sondern in b Wellen von derselben Intensität erregt würden. Auch ist der Unterschied der Phasen des erregenden und erregten Punktes in beiden Fällen gleich.***

Aus der nach der Gleichung $(8^b.)$ gemachten Bemerkung geht hervor, dafs dasselbe noch gilt, wenn der Raum von einer unendlichen Ebene theilweise begrenzt ist. Ist Φ das Geschwindigkeitspotential von Schallwellen, die eine gröfsere Zahl von Erregungspunkten b_1, b_2 etc. b_m haben, also von der Form

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_m,$$

wo Φ_m das Potential der in b_m erregten Schallwellen ist, so wird

$$(9^b.)\quad \Sigma[\Psi_{b,n}] = \Sigma[\Phi_{m,a}].$$

In dem Falle, wo die durch Ψ dargestellte Schallbewegung nicht davon herrührt, dafs ein tönender Punkt a sich im freien Raume befindet, sondern dafs an irgend einem Oberflächenelemente der Begrenzung des Luftraumes, das wir mit da bezeichnen wollen, $\frac{d\Psi}{dn}$ nicht Null, sondern

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B\cos 2\pi nt$$

ist, so wird aus der Gleichung (9.)

$$(9^c.)\quad 4\pi A\Psi_b = -B\Phi_a da.$$

Dieser Satz kann dazu dienen, um in solchen Fällen, wo man die Schallbewegung der Luft vollständig nur für gewisse besondere Lagen des schallerregenden Punktes bestimmen kann, doch wenigstens für alle anderen Lagen eines oder beliebig vieler schallerregender Punkte die Erregung in

jenen ersten Stellen des Raumes zu bestimmen. Namentlich ist der Satz wichtig, wenn man die Schallbewegung für eine jede entfernte Lage des tönenden Punktes bestimmen kann, weil man dann rückwärts auch für jede andere Lage des tönenden Punktes die Fernwirkung bestimmen kann, auf die es bei den akustischen Versuchen meistens allein ankommt.

§. 6.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, die Bewegung der Luft am offenen Ende einer cylindrischen Röhre zu bestimmen, wenn im Innern der Röhre durch irgend eine Ursache ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, zu Stande gekommen sind, und sich die Bewegung durch die Mündung der Röhre der äufseren Luft mittheilt, welche übrigens zunächst durch keine anderen Schall erregenden Kräfte afficirt sein möge.

Die Form der Röhre sei im Allgemeinen cylindrisch von beliebigem Querschnitte; nur in geringer Entfernung von der Mündung möge dieselbe von der cylindrischen Form abweichen dürfen. Wir schliefsen also Röhren mit trompetenförmigen oder halb gedeckten Mündungen in unsere Untersuchung ein. Uebrigens setzen wir voraus, dafs sowohl die Dimensionen der Oeffnung, wie auch die Länge des nicht cylindrischen Theils der Röhre gegen die Wellenlänge verschwindend klein seien. Den äufseren Raum denken wir uns der Einfachheit wegen nach einer Seite begrenzt durch eine unendliche Ebene, welche senkrecht gegen den cylindrischen Theil der Röhrenwand gerichtet ist, und in welcher die Röhrenmündung selbst liegt. Diese Ebene sei die yz-Ebene, die Röhre befinde sich auf Seite der negativen x, deren Axe im Innern der Röhre liegen und dem cylindrischen Theile ihrer Wand parallel sein soll. Auf Seite der positiven x sei der Luftraum unbegrenzt. Nach der gemachten Annahme betrachten wir ky und kz als verschwindend klein gegen 1, wenn y und z Coordinaten eines Punktes der Röhrenmündung sind, und ebenso kx, wenn x einem Punkte des nicht cylindrischen Theils der Röhrenwand angehört.

Unsere Voraussetzungen über die Natur der Bewegung, welche wir untersuchen wollen, drücken sich nun in folgenden Gleichungen aus. Erstens nehmen wir an, dafs irgendwo in der Röhre sich ein Abschnitt befinde, zwischen welchem und der Mündung keine äufseren Kräfte auf die Luftmasse einwirken, und in welchem das Geschwindigkeitspotential Ψ unendlich wenig

verschieden sei von der Form

$$\Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi nt) + \left(\frac{\mathfrak{A}}{k}\sin kx + \mathfrak{B}\cos kx\right)\sin(2\pi nt).$$

Dies ist die allgemeinste Form, welche ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, haben können. Zur weiteren Vereinfachung wollen wir gleich den Anfang der Zeit t so festsetzen, was offenbar immer möglich ist, dafs $\mathfrak{A} = 0$ wird, und somit Ψ in dem besagten Abschnitte der Röhre die Form erhält:

$$(10.) \qquad \Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi nt) + \mathfrak{B}\cos kx\sin(2\pi nt).$$

Auf Seite der positiven x denke man sich zwei halbe Kugelflächen von sehr grofsem Radius construirt, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Zwischen beiden soll Ψ die Form kugeliger Wellen haben, die in den unendlichen Raum hinauslaufen, nämlich, wenn wir wie früher die Entfernung vom Anfang der Coordinaten mit ϱ bezeichnen,

$$(10^a.) \qquad \Psi = M\frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho} - M_1\frac{\sin(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho},$$

wo M und M_1 unabhängig von ϱ, aber möglicher Weise abhängig von den Winkeln sind, die ϱ mit den Coordinatenaxen bildet.

Jenseits der äufseren jener beiden Kugelflächen mag noch ein Raum liegen, wo die Schallbewegung erst beginnt, aber zwischen der Region der ebenen Wellen in der Röhre, deren Bewegung in der Gleichung (10.) gegeben ist, und der Region der Kugelwellen von der Form (10^a.) soll die Stärke und Phase der Luftschwingungen stationär geworden sein, also Ψ hier überall von der Form sein:

$$(10^b.) \qquad \Psi = \Psi'\cos(2\pi nt) + \Psi''\sin(2\pi nt),$$

worin Ψ' und Ψ'' Functionen der Coordinaten, aber unabhängig von der Zeit sind und in diesem ganzen Theile des Luftraumes die Bedingung erfüllen:

$$(3^b.) \qquad 0 = k^2\Psi + \nabla\Psi.$$

Endlich mufs noch längs der ganzen Wand der Röhre und an dem Theile der yz-Ebene, welcher nicht von der Röhrenmündung eingenommen ist, sein:

$$(10^c.) \qquad \frac{d\Psi}{dn} = 0.$$

Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den Coefficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M und M_1 der Gleichungen (10.) und (10^a.) mittelst des erweiterten *Green*schen Theorems aufsuchen.

Die erste Anwendung der Gleichung (7.) machen wir auf den inneren Raum der Röhre, dieser von der Ebene der Mündung bis zu einer damit parallelen Ebene genommen, welche in der Region der ebenen Wellen liegt. Die Function Φ der Gleichung (7.) setzen wir hier:

$$\Phi = \cos kx.$$

Da sowohl Φ wie Ψ die Gleichung (3^b.) erfüllen innerhalb des hier betrachteten Raumes, so reducirt sich Gleichung (7.) auf

$$(7^b.) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 0.$$

Nun ist $\frac{d\Psi}{dn}$ nur an der Mündung und in dem Querschnitte der Röhre von Null verschieden, dort ist es gleich $-\frac{d\Psi}{dx}$, hier gleich $+\frac{d\Psi}{dx}$. Es wird also

$$\int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = -\cos 2\pi nt \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega - \sin 2\pi nt \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega$$
$$+ Q(A \cos kx - Bk \sin kx) \cos kx \cos(2\pi nt) - Q\mathfrak{B}k \sin kx \cos kx \sin(2\pi nt).$$

Durch den Horizontalstrich $\overline{\Psi}$ oder $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ sollen hier und fortan die Werthe bezeichnet werden, welche die betreffenden Functionen in der Ebene der Röhrenmündung haben. Mit Q ist die Gröfse des Querschnitts des cylindrischen Theils der Röhre bezeichnet. Dagegen ist $\frac{d\Phi}{dn}$ am cylindrischen Theile der Röhrenwand und in der Oeffnung der Röhre gleich Null. Von Null verschieden ist es nur in dem Querschnitte der Röhre, wo es den Werth $-k \sin kx$ hat, und in dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand. Nennt man den Winkel, den die nach innen gerichtete Normale der Röhrenwand mit den positiven x bildet, β, so ist, da $\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d\Phi}{dz} = 0$,

$$\frac{d\Phi}{dn} = \cos\beta \frac{d\Phi}{dx} = -k \sin kx \cos\beta.$$

Wir haben also

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = -Q(A \sin kx + kB \cos kx) \sin kx \cos(2\pi nt)$$
$$- Qk\mathfrak{B} \cos kx \sin kx \sin(2\pi nt)$$
$$+ k \cos(2\pi nt) \int \Psi' \sin kx \cos\beta \, d\omega$$
$$+ k \sin(2\pi nt) \int \Psi'' \sin kx \cos\beta \, d\omega.$$

Wenn man diese Werthe der Integrale in die Gleichung (7^b.) einführt, und

einzeln die mit $\cos(2\pi nt)$ und die mit $\sin(2\pi nt)$ multiplicirten Glieder gleich Null setzt, so erhält man

$$(11.) \quad AQ = \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega + k\int \Psi' \sin kx \cos\beta\, d\omega,$$

$$(11^a.) \quad 0 = \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, d\omega + k\int \Psi'' \sin kx \cos\beta\, d\omega.$$

In beiden Gleichungen ist das erste Integral über die ganze Oeffnung der Röhre zu nehmen, das zweite über die Wand der Röhre, doch wollen wir gleich bemerken, dafs an allen Stellen, wo $\cos\beta$ von Null verschieden ist, kx nach unserer Annahme eine verschwindend kleine Gröfse wird. In rein cylindrischen Röhren mit ganz offener oder theilweis gedeckter Mündung fallen diese letzteren Integrale ganz weg.

Die zweite Anwendung des Theorems (7.) machen wir auf den freien Raum auf Seite der positiven x, der einerseits begrenzt gedacht wird durch die yz-Ebene, andererseits durch eine um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt construirte halbe Kugelfläche, welche in die Region der kugeligen Wellen fällt. Innerhalb dieses Raumes liege der Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind. Die Entfernung des Punktes x, y, z von ihm sei $r_{'}$, während $r_{''}$ die Entfernung von dem Punkte sei, dessen Coordinaten $-\alpha$, β, γ sind, und der aufserhalb des hier betrachteten Raumes liegt. Die Function Φ der Gleichung (7.) setzen wir

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\frac{\cos(kr_{'}-2\pi nt)}{r_{'}} + \tfrac{1}{2}\frac{\cos(kr_{''}-2\pi nt)}{r_{''}}.$$

Indem wir nun die Gleichung (7.) anwenden mit Beachtung des in (7^c.) berücksichtigten Umstandes der Unstetigkeit von Φ im Punkte α, β, γ, erhalten wir:

$$(11^b.) \quad \int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 2\pi \cos(2\pi nt)\, \Psi_\alpha,$$

wo Ψ_α den Werth von Ψ im Punkte α, β, γ bezeichnet.

Wie im Falle der Gleichung (9.) wird die Gröfse $\Phi\frac{d\Psi}{dn} - \Psi\frac{d\Phi}{dn}$ an der weit entfernten Kugelfläche eine von der Zeit unabhängige Gröfse, ebenso natürlich auch das Integral dieser Gröfse über die Kugelfläche, welches wir mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen. An der yz-Ebene dagegen ist $\frac{d\Phi}{dn}$ überall gleich Null, ebenso $\frac{d\Psi}{dn}$ überall mit Ausnahme der Oeffnung, wo es gleich $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ ist;

Φ aber bekommt den Werth

$$\overline{\Phi} = \frac{\cos(kr_1 - 2\pi nt)}{r_1},$$

weil an der yz-Ebene $r_1 = r_{11}$ ist. So erhalten wir die Gleichung

$$(11^c.) \quad \mathfrak{G} - \int \frac{d\overline{\Psi}}{dx} \frac{\cos(kr_1 - 2\pi nt)}{r_1} d\omega = 2\pi \cos(2\pi nt)\, \Psi_a.$$

Setzen wir nun nach Gleichung $(10^b.)$

$$(10^b.) \quad \Psi = \Psi' \cos(2\pi nt) + \Psi'' \sin(2\pi nt),$$

so können wir in der Gleichung $(11^c.)$, welche für alle Werthe von t erfüllt sein mufs, die Quadrate und Producte von $\cos(2\pi nt)$ und $\sin(2\pi nt)$ durch $\cos(4\pi nt)$ und $\sin(4\pi nt)$ ausdrücken und dann einzeln gleich Null setzen: 1) die Glieder, welche nach der Zeit constant sind, 2) die Glieder, welche mit $\cos(4\pi nt)$ multiplicirt sind und 3) die mit $\sin(4\pi nt)$ multiplicirten, und erhalten dadurch folgende drei Gleichungen:

$$(11^d.) \quad \begin{cases} \mathfrak{G} = \pi \Psi'_a + \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos kr_1}{r_1} + \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\sin kr_1}{r_1} \right) d\omega, \\ 0 = \pi \Psi'_a + \frac{1}{2} \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos kr_1}{r_1} d\omega - \frac{1}{2} \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\sin kr_1}{r_1} d\omega, \\ 0 = \pi \Psi''_a + \frac{1}{2} \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\sin kr_1}{r_1} d\omega + \frac{1}{2} \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\cos kr_1}{r_1} d\omega. \end{cases}$$

Die Integrationen sind über die Oeffnung der Röhre auszudehnen. Durch die beiden letzten Gleichungen ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für alle Punkte des Raumes auf Seite der positiven x gegeben, wenn die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}$ und $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}$ in der Oeffnung der Röhre bekannt sind. Die erste Gleichung folgt aus den beiden anderen mittelst des Theorems $(7^d.)$. Der Werth von Ψ_a wird demnach:

$$(11^e.) \quad \Psi_a = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos(kr_1 - 2\pi nt)}{r_1} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} \frac{\sin(kr_1 - 2\pi nt)}{r_1} d\omega.$$

Wenn wir statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführen, nämlich

$$\alpha = \varrho \cos\omega, \ \beta = \varrho \sin\omega \cos\vartheta, \ \gamma = \varrho \sin\omega \sin\vartheta,$$

so wird in unendlich grofser Entfernung ϱ vom Anfangspunkte der Coordinaten mittelst einer ähnlichen Umformung, wie sie in $(8^a.)$ ausgeführt ist,

$$(10^a.) \quad \Psi = M \frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho} - M_1 \frac{\sin(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho},$$

wo

$$(11^f.)\quad \begin{cases} M = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\cos k\varepsilon + \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\sin k\varepsilon\right)dy\,dz, \\ M_1 = -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\cos k\varepsilon - \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\sin k\varepsilon\right)dy\,dz, \end{cases}$$

$$\varepsilon = y\sin\omega\cos\vartheta + z\sin\omega\sin\vartheta,$$

und wo die Integrationen über die Oeffnung der Röhre auszudehnen sind.

Eine dritte Anwendung des erweiterten *Green*schen Satzes machen wir auf den Raum, welcher zwischen einem Querschnitte der Röhre in der Region der ebenen Wellen und einer halben Kugelfläche in der Region der kugeligen Wellen liegt. Für die Functionen Ψ und Φ der Gleichung (7.) setzen wir Ψ' und Ψ'' und haben wie in (7^b.)

$$(7^b.)\quad \int\Psi'\frac{d\Psi''}{dn}d\omega - \int\Psi''\frac{d\Psi'}{dn}d\omega = 0.$$

Da längs der ganzen festen Wand des Raumes $\frac{d\Psi'}{dn} = \frac{d\Psi''}{dn} = 0$, so ist die Integration nur über den Querschnitt der Röhre und die Halbkugel auszudehnen. Im Querschnitt ist:

$$\Psi' = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

$$\Psi'' = \mathfrak{B}\cos kx,$$

$$\Psi'\frac{d\Psi''}{dx} - \Psi''\frac{d\Psi'}{dx} = -A\mathfrak{B}.$$

An der Kugelfläche ist:

$$\Psi' = M\frac{\cos k\varrho}{\varrho} + M_1\frac{\sin k\varrho}{\varrho},$$

$$\Psi'' = M\frac{\sin k\varrho}{\varrho} - M_1\frac{\cos k\varrho}{\varrho},$$

$$-\Psi'\frac{d\Psi''}{d\varrho} + \Psi''\frac{d\Psi'}{d\varrho} = -\frac{k(M^2+M_1^2)}{\varrho^2}.$$

Wenn man die Integrale nimmt, wird:

$$(11^g.)\quad 0 = A\mathfrak{B}Q + k\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega\int_0^{2\pi}d\vartheta\,(M^2+M_1^2)\sin\omega.$$

Endlich wenden wir noch das Theorem (7.) auf den inneren Raum der Röhre an von der Ebene der Mündung bis zu einem Querschnitt in der Region der ebenen Wellen für die Function Ψ' und

$$\Phi = \sin kx,$$

$$(7^b.) \quad \int \Psi' \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi'}{dn} = 0.$$

Am Querschnitte der Röhre wird

$$\Psi' \frac{d\Phi}{dx} - \Phi \frac{d\Psi'}{dx} = kB.$$

An der Wand der Röhre wird $\frac{d\Psi'}{dn} = 0$, an ihrer Mündung $\Phi = 0$, so dafs das zweite Integral der Gleichung (7^b.) verschwindet. Im ersten wird an der Wand der Röhre:

$$\frac{d\Phi}{dn} = k \cos kx \cos \beta,$$

an der Mündung $\frac{d\Phi}{dn} = -k$. Also haben wir:

$$(11^h.) \quad QB + \int \Psi' \cos kx \cos \beta \, d\omega - \int \overline{\Psi'} \, d\omega = 0,$$

wo das erste Integral über den nicht cylindrischen Theil der Röhrenwand auszudehnen ist, so weit $\cos\beta$ sich von Null unterscheidet, das zweite über die Oeffnung der Röhre.

Wir haben jetzt in den Gleichungen (11.), (11^a.), (11^d.), (11^f.), (11^g.), (11^h.) die Werthe der Coefficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M, M_1 und der Functionen Ψ' und Ψ'' im freien Raume zurückgeführt auf Integrale, in denen nur die Werthe vorkommen, welche Ψ', Ψ'' und ihre Differentialquotienten theils in der Mündung der Röhre selbst, theils an dem nicht cylindrischen Theile ihrer Wand haben. Wir wollen jetzt die Vereinfachungen dieser Ausdrücke einführen, welche daraus herfliefsen, dafs die Dimensionen der Mündung und die Länge des nicht cylindrischen Theiles der Röhre unserer Annahme nach gegen die Wellenlänge verschwindend klein sein sollen. Vernachlässigen wir Gröfsen von der Ordnung $k\varepsilon$ gegen 1, so nehmen unsere Gleichungen (11.), (11^a.) und (11^f.) folgende Gestalt an

$$(12.) \quad AQ = \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega,$$

$$(12^a.) \qquad 0 = \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, d\omega + k^2 \int \Psi'' x \cos\beta\, d\omega,$$

$$(12^b.) \qquad \boldsymbol{M} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{AQ}.$$

Für den Werth von $\boldsymbol{M_1}$ ist zu bemerken, dafs das von k unabhängige Glied desselben $\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, d\omega$ nach $(11^a.)$ selbst eine verschwindend kleine Gröfse ist, dafs ferner auch das mit der ersten Potenz von k multiplicirte $\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, \varepsilon\, d\omega$ der Null gleich gemacht werden kann, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten, über den bisher nur bestimmt ist, dafs er in der Oeffnung der Röhre liegen solle, in den Schwerpunkt einer Masse verlegt, welche mit der Dichtigkeit $\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}$ über die Fläche der Oeffnung verbreitet ist, also reducirt sich der Werth von $\boldsymbol{M_1}$ auf verschwindend kleine Gröfsen, nämlich

$$(12^c.) \qquad \boldsymbol{M_1} = \frac{k^2}{2\pi}\int \Psi'' x \cos\beta\, d\omega + \frac{k^2}{4\pi}\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\, \varepsilon^2\, d\omega.$$

Wir werden also $\boldsymbol{M_1}$ gegen $\boldsymbol{M}$ vernachlässigen und letzteres als unabhängig von den Winkeln ω und ϑ betrachten dürfen, also aus $(11^g.)$ erhalten

$$\boldsymbol{A\mathfrak{B}Q} = -2\pi k \boldsymbol{M}^2,$$

oder mit Berücksichtigung von

$$(12^b.) \qquad \boldsymbol{AQ} = -2\pi \boldsymbol{M},$$

$$(12^d.) \qquad \mathfrak{B} = k\boldsymbol{M} = -\frac{k}{2\pi}\boldsymbol{AQ},$$

endlich

$$(12^e.) \qquad \boldsymbol{QB} = \int \overline{\Psi'}\, d\omega - \int \Psi' \cos\beta\, d\omega.$$

Da nun übrigens nach $(11^e.)$ in der Ebene der Mündung mit Vernachlässigung kleiner Gröfsen

$$\overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, \frac{d\omega}{r}$$

und

$$(12^b.) \qquad \boldsymbol{M} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{AQ},$$

so sind $\boldsymbol{M}$ oder $\boldsymbol{AQ}$ und $\varepsilon\overline{\Psi'}$ Gröfsen von gleicher Ordnung. Nun können wir die Gleichung $(12^c.)$ schreiben

$$\boldsymbol{QB} = \pm \iint \Psi'\, dy\, dz,$$

wo die Integration über alle Werthe von z und y auszudehnen ist, welche der Oeffnung und Wand der Röhre angehören, und das + Zeichen sowohl an der Oeffnung als an denjenigen Theilen der Wand zu nehmen ist, deren Normale mit den negativen x einen spitzen Winkel bildet, das — Zeichen an den Theilen, deren Normale mit den positiven x einen spitzen Winkel bildet. QB ist also gleich den Werthen von Ψ' in der Nähe der Oeffnung integrirt über eine Fläche von der Gröfse Q, also ist B von der Gröfsenordnung $\overline{\Psi'}$ oder $\frac{AQ}{\varepsilon}$. Wenn also der Querschnitt der Röhre von derselben Ordnung kleiner Gröfsen wie die Oeffnung, d. h. von der Ordnung ε^2 ist, ist B von der Ordnung $A\varepsilon$. Genauer läfst sich bei der Allgemeinheit unserer Annahmen das Verhältnifs $\frac{B}{A}$ nicht bestimmen. Wir werden später bei den Beispielen sehen, dafs es von der Form der Mündung abhängt, von welcher wir das Verhältnifs $\frac{\mathfrak{B}}{A}$ unabhängig gefunden haben, und dafs es nicht merklich von dem Werthe von k abhängt, so lange der Querschnitt der Röhre und die Länge des nicht cylindrischen Theiles als verschwindend gegen die Wellenlänge zu betrachten sind. Ist übrigens die Oeffnung der Röhre sehr klein gegen den Querschnitt, so kann $\frac{B}{A}$ jeden beliebigen gröfseren Werth erreichen.

Innerhalb der tieferen Theile der Röhre ist also, wenn wir setzen

$$(12^f.) \qquad \frac{kB}{A} = -\operatorname{tang} k\alpha,$$

$$(12^g.) \qquad \Psi = \frac{A}{k\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\cos(2\pi nt) - \frac{AkQ}{2\pi}\cos kx\sin(2\pi nt),$$

und dazu gehört die Bewegung in den entfernten Stellen des freien Raumes, indem wir M_1 gegen M vernachlässigen,

$$(12^h.) \qquad \Psi = -\frac{AQ}{2\pi}\frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho},$$

in welchen beiden Gleichungen A eine willkührliche Constante ist, und α für jede besondere Röhrenform besonders bestimmt werden mufs.

Die Natur des hier behandelten Problems wird noch klarer, wenn man auf den Grenzfall übergeht, wo $k=0$ wird. Dann werden die beiden Functionen Ψ' und Ψ'' von einander unabhängig, und es entstehen aus unserem Problem folgende zwei Aufgaben:

1) Es ist eine Function Ψ' zu suchen, welche in dem ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dafs

$$\nabla \Psi' = 0,$$

welche für grofse negative x übergeht in $Ax+B$, für grofse positive in $-\frac{AQ}{2\pi\varrho}$, und für die längs der ganzen festen Wand $\frac{d\Psi'}{dn}=0$ ist. Es ist dies mathematisch dieselbe Aufgabe, als hätten wir einen homogenen electrischen Leiter von der Gestalt unseres Luftraumes, welchen ein electrischer Strom von bestimmter Intensität (AQ, wenn das Leitungsvermögen des Stoffes gleich 1 ist) durchfliefst, der aus dem cylindrischen Theile in den unendlichen Raum übergeht. Wir nennen bekanntlich den Leitungswiderstand zweier Leiter gleich, wenn bei gleicher Intensität des Stromes ihre Endflächen Flächen constanten Potentials sind und dieselbe Differenz des Potentials zeigen. Nun ist in irgend einem Querschnitte des cylindrischen Theiles die Potentialfunction $Ax+B$ für unendliche Entfernung im freien Raume Null. Denken wir uns dagegen den cylindrischen Leiter cylindrisch fortgesetzt und überall die Potentialfunction gleich $Ax+B$, so wird sie Null, wenn $x=-\frac{B}{A}=\alpha$. Es ist also $-(x-\alpha)$ die Länge eines cylindrischen Leiters von demselben Material, welcher denselben electrischen Widerstand bietet wie der Leiter von Gestalt unseres Luftraumes, gerechnet von einem Querschnitt des cylindrischen Theiles in der Entfernung $-x$ von der Mündung bis in unendliche Entfernung im freien Raume. Nach der in der Electricitätslehre gebräuchlichen Terminologie würde also $-(x-\alpha)$ die ***reducirte Länge*** jenes Leiters genannt werden können, und wir wollen dieselbe Benennung auch hier brauchen. Die Constante B oder α verschwindet also nicht mit k zugleich, obgleich andererseits einzusehen ist, dafs sie meistens nicht grofs sein kann, da der Widerstand unendlich ausgedehnter Leiter, wie der der Erde, immer sehr klein ist verglichen mit dem Widerstande cylindrischer Leiter von demselben Material, aus denen die Electricität in den unendlichen Leiter ausströmt, und es folgt auch weiter aus den bekannten Theoremen über Electricitätsleitung, dafs α desto gröfser werden mufs, je enger die Mündung der Röhre gemacht wird, was sich auch in den akustischen Versuchen durch die Veränderung des Tons der Röhren zeigt, dessen Abhängigkeit vom Werthe von α wir unten feststellen werden.

Wenn die Oeffnung sehr klein und kreisförmig ist, während die den Cylinder schliefsende Wand in ihrer Nähe nahehin eben ist, läfst sich anneh-

men, dafs der Widerstand hauptsächlich nur von den dicht bei der Oeffnung gelegenen Theilen herrührt, wo die Bahn der Strömung am engsten ist. Der Widerstand einer kreisförmigen Oeffnung vom Radius R in einer isolirenden Ebene, welche zwei unendlich ausgedehnte Leiter von einander trennt, ist aber ausgedrückt durch die Länge l eines Cylinders vom Querschnitt Q:

$$(12^i.) \qquad l = \frac{Q}{2R},$$

und dies würde in diesem Falle auch der Werth von $-\frac{B}{A}$ sein.

2) Es ist eine Function $\frac{1}{k}\Psi''$ zu suchen, welche im ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dafs $\nabla\Psi'' = 0$, welche für grofse Entfernungen von der Mündung sowohl auf Seite der negativen wie der positiven x wird:

$$\frac{1}{k}\Psi'' = -\frac{AQ}{2\pi}$$

und längs der ganzen festen Wand des Luftraumes $\frac{d\Psi}{dn} = 0$. Offenbar ist unter diesen Umständen Ψ'' im ganzen Raume constant. Hierbei wird dann ersichtlich, dafs in der Oeffnung nicht blos, wie wir schon gesehen, die Gröfse $\int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega$, sondern auch $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}$ selbst mit k zugleich verschwindet.

---

§. 7.

Die bisher gewonnenen Sätze lassen nun eine Reihe allgemeiner Folgerungen ziehen nicht blos über die Lage der Schwingungs-Minima und Maxima (Knoten und Bäuche der Schwingungen) und die davon abhängende Höhe der natürlichen Töne der Röhre, die wir als ***Töne stärkster Resonanz*** characterisiren können, welche Aufgaben schon die bisherigen Theorien mehr oder weniger genügend behandelt haben, sondern sie geben uns für eine Reihe besonderer Erregungsweisen der Töne auch bestimmte Auskunft über die Stärke und Phasen der in der Röhre erregten Schwingungen.

Die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ist aus $(12^a.)$ berechnet

$$(13.) \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \frac{A}{\cos k\alpha}\cos k(x-\alpha)\cos(2\pi nt) + \frac{Ak^2Q}{2\pi}\sin kx\sin(2\pi nt)$$

oder

$$(13^a.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Psi}{dx} = J\cos(2\pi nt+\tau), \\ \text{wenn} \\ J = A\sqrt{\dfrac{\cos^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \dfrac{k^4Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kx}, \\ \operatorname{tang}\tau = -\dfrac{k^2Q\sin kx\cos k\alpha}{2\pi\cos k(x-\alpha)}. \end{cases}$$

Die Werthe von x, für welche J^2 ein Maximum oder Minimum wird, werden gefunden durch die Gleichung

$$(13^b.)\quad \operatorname{tang} 2k(x-\alpha) = \frac{k^4Q^2\sin k\alpha\cos^2 k\alpha}{2\pi^2\left(1-\dfrac{k^4Q^2}{4\pi^2}\cos^3 k\alpha\right)}.$$

Wenn x_0 ein Werth ist, der für x gesetzt diese Gleichung erfüllt, so wird sie auch erfüllt durch

$$x = x_0 + \mathfrak{a}\frac{\lambda}{4} = x_0 + \frac{\mathfrak{a}\pi}{2k},$$

worin $\mathfrak{a}$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. ***Die Maxima und Minima der Schwingung liegen also in der Röhre um Viertelwellenlängen von einander entfernt.*** Sie liegen aber nicht nothwendig um ein genaues Vielfache einer Viertelwellenlänge von der Oeffnung der Röhre entfernt. Wenn, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, k^2Q eine unendlich kleine Gröfse ist, so wird mit Vernachlässigung der kleinen Gröfsen zweiter Ordnung die Gleichung $(13^b.)$:

$$\operatorname{tang} 2k(x-\alpha) = 0.$$

Dann wird J^2 ein Maximum J_I^2, wenn

$$k(x-\alpha) = \mathfrak{a}\pi, \quad \text{also} \quad \cos k(x-\alpha) = \pm 1,$$

$$J_I^2 = \frac{A^2}{\cos^2 k\alpha},$$

und J^2 wird ein Minimum J_{II}^2, wenn

$$k(x-\alpha) = (\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2})\pi, \quad \text{also} \quad \cos k(x-\alpha) = 0,$$

$$J_{II}^2 = A^2\frac{k^4Q^2}{4\pi^2}\cos^2 k\alpha.$$

Denken wir uns die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt, so würde in der kleinen Entfernung α vor der Oeffnung ein Maximum der Schwingung liegen. Denken wir uns die Entfernungen der Querschnitte der Röhre von diesem um die Länge α vor der Oeffnung in der Axe der Röhre gelegenen Punkte ge-

zählt und nennen diese Entfernungen ***die reducirten Längen*** des betreffenden Röhrenstücks, so erhalten wir ***Maxima der Schwingung überall, wo die reducirte Länge gleich einem geraden Vielfachen der Viertelwellenlänge und Minima der Schwingung (Knotenflächen), wo die reducirte Länge der Röhre einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge gleich ist.*** In den Knotenflächen herrscht aber nicht absolute Ruhe, sondern die Bewegung wird nur sehr klein.

Am Orte der Maxima der Schwingung wird $\operatorname{tang}\tau$ gleich einer unendlich kleinen Gröfse, also $\tau = \mathfrak{a}\pi$, am Orte der Minima wird $\operatorname{tang}\tau = \infty$, also $\tau = (\mathfrak{a} + \frac{1}{2})\pi$, folglich ***sind die Phasen der Bewegung am Orte der Maxima und Minima um eine Viertelschwingungsdauer verschieden.***

Nach Gleichung (1^f.) ist die Verdichtung der Luft, wo keine äufseren Kräfte wirken,

$$\mathfrak{h} = -\frac{1}{a^2}\frac{d\Psi}{dt},$$

also in unserem Falle:

$$(14.)\quad \mathfrak{h} = \frac{A}{a\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\sin(2\pi nt) + \frac{Ak^2Q}{2\pi a}\cos kx\cos(2\pi nt)$$

oder:

$$(14^a.)\quad \begin{cases} \mathfrak{h} = L\sin(2\pi nt + \tau_1), \\ \text{wenn} \\ L = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{\sin^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4Q^2\cos^2 kx}{4\pi^2}}, \\ \operatorname{tang}\tau_1 = \frac{k^2Q\cos kx\cos k\alpha}{2\pi\sin k(x-\alpha)}. \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichung, welche die Werthe von x giebt, für welche L^2 ein Maximum oder Minimum wird, ist dieselbe wie (13^b.), welche oben für die Grenzwerthe von J^2 aufgestellt ist, aber wo letzteres ein Maximum ist, wird L^2 ein Minimum, und umgekehrt. Wo L ein Maximum, wird $\operatorname{tang}\tau_1 = 0$ (oder vielmehr gleich einer verschwindend kleinen Gröfse), also:

$$\mathfrak{h} = \pm\frac{A}{a\cos k\alpha}\sin(2\pi nt), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm\frac{Ak^2Q\cos k\alpha}{2\pi}\sin(2\pi nt),$$

wo L^2 ein Minimum ist, wird $\operatorname{tang}\tau_1 = \infty$,

$$\mathfrak{h} = \pm\frac{Ak^2Q\cos k\alpha}{2\pi a}\cos(2\pi nt), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm\frac{A}{\cos k\alpha}\cos(2\pi nt).$$

An diesen Stellen also fällt das Maximum der Verdichtung mit dem Maximum der Geschwindigkeit in der Zeit zusammen, nicht aber an den zwischenliegen-

den Stellen. Denn wo weder $\sin k(x-\alpha)$ noch $\cos k(x-\alpha)$ der Null nahe sind, sind sowohl $\operatorname{tang}\tau$ als $\operatorname{tang}\tau_1$ sehr kleine Gröfsen, und es wird also nahehin

$$\mathfrak{h} = L\sin(2\pi nt), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = J\cos(2\pi nt),$$

so dafs hier die Maxima des Druckes und der Geschwindigkeit nahehin um eine Viertel-Undulationszeit auseinanderfallen.

Denkt man sich die ebenen Wellen bis zur Oeffnung der Röhre, wo $x = 0$, fortgesetzt, so wird dort $\operatorname{tang}\tau = 0$, dagegen

$$\operatorname{tang}\tau_1 = -\frac{k^2Q}{2\pi}\operatorname{cotang} k\alpha.$$

Nun ist im Allgemeinen $\operatorname{tang} k\alpha$ eine kleine Gröfse erster Ordnung, k^2Q eine solche zweiter Ordnung, also $\operatorname{tang}\tau_1$ sehr klein und τ_1 nahe an Null. Aber es kann auch für besondere Röhrenformen $\alpha = 0$ werden, dann würde $\tau_1 = \frac{1}{2}\pi$. Im ersteren Falle würden in der Oeffnung die Maxima der Geschwindigkeit und der Verdichtung um eine Viertelundulation der Zeit nach aus einander liegen, im zweiten Falle zusammenfallen. *Poissons* Voraussetzung, dafs die Verdichtung in der Oeffnung gleich der Geschwindigkeit multiplicirt mit einer sehr kleinen Constanten sei, ist also nur in einem besonderen Falle richtig, den er allerdings als den allgemeinen betrachtete. Auch in diesem Falle ist sie übrigens nur richtig, wenn man sich erlaubt, die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt zu denken, aber nicht, wenn man die wirklich in der Oeffnung stattfindenden mittleren Werthe der Geschwindigkeit und Verdichtung nimmt.

Was die Lage der einzelnen Wellenphasen in einem gegebenen Augenblicke betrifft, so finden wir die Lage der Geschwindigkeitsmaxima in der Region der ebenen Wellen, indem wir $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0$ setzen, oder auch $\Psi = 0$, da hier $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0$. Also:

$$0 = \frac{A}{k}\cos(2\pi nt)\sin kx + [B\cos(2\pi nt) + \mathfrak{B}\sin(2\pi nt)]\cos kx;$$

daraus folgt als Bedingung (s. (12^f.) und (12^g.))

$$(14^b.) \qquad \operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} k\alpha + \frac{k^2Q}{2\pi}\operatorname{tang}(2\pi nt).$$

Wenn $t = 0$, wird

$$\operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} k\alpha,$$

die Maxima der Geschwindigkeit liegen dann, wo $-(x-\alpha) = \mathfrak{a}\lambda$, die Minima,

wo $-(x-\alpha)=(\mathfrak{a}+\frac{1}{2})\lambda$. Wenn nun t wächst, so bleibt, weil k^2Q eine verschwindend kleine Gröfse ist, doch immer noch $\operatorname{tang} kx$ unmerklich wenig verschieden von $\operatorname{tang} k\alpha$, also die Lage der Maxima und Minima unverändert, so lange $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endliche Werthe hat. Wenn aber t sich dem Werthe einer Viertel-Schwingungsdauer nähert, wird auch $\operatorname{tang} kx$ gleichzeitig mit $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ erst $+\infty$, dann $-\infty$, dann aber, so wie $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endliche negative Werthe erreicht hat, wird $\operatorname{tang} kx$ wieder gleich $\operatorname{tang} k\alpha$, und so bleibt es wieder während beinahe einer halben Schwingungsdauer stationär, so lange $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endlich bleibt. So oft nun $\operatorname{tang} kx$ vom Werthe $\operatorname{tang} k\alpha$ auf $+\infty$ wächst, dann von $-\infty$ durch die negativen Werthe bis 0 und wieder auf $\operatorname{tang} k\alpha$ übergeht, mufs kx um π wachsen und x selbst um $\frac{1}{2}\lambda$. So wird also ein Maximum, welches zur Zeit $t=0$ da liegt, wo die reducirte Länge $\mathfrak{a}\lambda$ beträgt, um die Zeit $t=\frac{1}{4n}$ schnell übergehen auf die reducirte Länge $(\mathfrak{a}-\frac{1}{2})\lambda$, hier beinahe stillstehen bis $t=\frac{3}{4n}$, dann schnell fortschreiten auf $(\mathfrak{a}-1)\lambda$ u. s. w.

Im freien Raume dagegen bewegen sich die Maxima der Geschwindigkeit mit der gleichmäfsigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a vorwärts. In den entfernteren Theilen des freien Raumes liegen sie zur Zeit $t=0$, wo $\varrho=(\mathfrak{b}+\frac{1}{4})\lambda$. Der Abstand zweier Maxima der Geschwindigkeit, von denen eines im freien Raume in der x-Axe, das andere in der Röhre gelegen ist, zur Zeit $t=0$ ist $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{4})\lambda-\alpha$. Da bis zur Zeit $t=\frac{1}{4n}$ das Maximum in der Röhre fast ganz still steht, das im freien Raume um $\frac{1}{4}\lambda$ fortschreitet, so wächst die Entfernung beider Maxima bis auf nahehin $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{2})\lambda-\alpha$, geht dann ziemlich schnell zurück auf $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\lambda-\alpha$, um während der nächsten halben Schwingungsdauer wieder auf $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{2})\lambda-\alpha$ zu steigen, und bewegt sich so immer zwischen den genannten Grenzen.

Mit der Verdichtung verhält es sich ähnlich. Ihre Maximalwerthe werden gegeben durch die Gleichung:

$$(14^c.) \qquad \operatorname{cotang} kx = -\operatorname{tang} k\alpha + k^2Q \operatorname{cotg}(2\pi nt).$$

Zur Zeit $t=\frac{1}{4n}$ ist $\operatorname{cotg}(2\pi nt)=0$, und die Maxima der Verdichtung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre $(\mathfrak{a}-\frac{1}{4})\lambda$ beträgt. Diese Lage behalten sie auch unverändert bis nahehin $t=\frac{2}{4n}$, wo $\operatorname{cotg}(2\pi nt)$ unendlich grofs wird. Dann rücken sie schnell vorwärts bis $(\mathfrak{a}-\frac{3}{4})\lambda$. In den entfern-

teren Theilen des freien Raumes liegen sie, wenn $t = \frac{1}{4n}$, da, wo $\varrho = (\mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda$. Ihr Abstand von denen in der Röhre beträgt also dann $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{4})\lambda - \alpha$, wächst allmälig auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \frac{1}{2})\lambda - \alpha$, sinkt schnell auf $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\lambda - \alpha$, wächst dann wieder allmälig u. s. w. Sowohl die Maxima des Druckes wie der Geschwindigkeit haben ihren gröfsten Werth in der Röhre, wenn sie stillstehen, ihren kleinsten, wenn sie vorwärts eilen. Uebrigens eilen die Maxima der Geschwindigkeit vorwärts zu den Zeiten und an den Orten, wo die des Druckes stillstehen, und umgekehrt.

Stärke der Resonanz in der Röhre. Denkt man sich die Röhre nur bis $x = -l$ reichend und ihr Ende im Bereiche der ebenen Wellen gelegen, so kann die Erschütterung der Luft in der Röhre entweder an diesem Ende mitgetheilt werden oder von der vorderen Oeffnung der Röhre her, indem ein Schallwellenzug gegen die Mündung der Röhre schlägt. Was zunächst den ersten Fall betrifft, so kann nach Feststellung der Form der ebenen Wellen leicht der Fall behandelt werden, wo die Röhre durch irgend eine Platte von beliebiger Masse geschlossen ist, welche durch irgend eine elastische Kraft (z. B. einer über die Mündung der Röhre ausgespannten Membran) in ihrer Lage gehalten und durch eine beliebige periodisch wirkende Kraft in Erschütterung versetzt wird. Es läfst sich dann für jede Röhrenform und Tonhöhe, für welche der Werth der Constanten α bekannt ist, sowohl die Form der ebenen Wellen als der Kugelwellen in den entfernteren Theilen des freien Raumes vollständig angeben. Hier genüge es, nur kurz den Fall zu erwähnen, wo eine Bewegung von bestimmter Geschwindigkeit mitgetheilt wird, der also practisch etwa dem Falle entspricht, wo eine Stimmgabel die Schlufsplatte der Röhre erschüttert.

Die Geschwindigkeit der der Schlufsplatte mitgetheilten Bewegung sei

$$G\cos(2\pi nt + \tau_{,,}),$$

wo wir unter $\tau_{,,}$ eine willkürliche Constante verstehen, mittelst deren wir den Anfang von t passend bestimmen. Dann mufs sein für $x = -l$

$$\frac{d\Psi}{dx} = J\cos(2\pi nt + \tau) = G\cos(2\pi nt + \tau_{,,}),$$

also

$$(15.) \qquad G = J = A\sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kl},$$

$$(15^a.) \qquad \operatorname{tang}\tau_{,,} = \operatorname{tang}\tau = \frac{k^2 Q \sin kl \cos k\alpha}{2\pi\cos k(l+\alpha)}.$$

Das Geschwindigkeitspotential in den ferneren Theilen des freien Raumes ist

$$\Psi = M\frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho},$$

wo

$$(12^b.) \qquad M = -\frac{AQ}{2\pi}.$$

Es läfst sich also A und M aus G und l bestimmen. A, das Schwingungsmaximum in der Röhre, und ebenso M, die Intensität der Kugelwellen im freien Raume, wird bei constantem G, also bei constanter Bewegung der Schlufsplatte der Röhre, am gröfsten, wenn der Factor von A in (15.) am kleinsten ist, d. h. wenn

$$\cos k(l+\alpha) = 0, \qquad k(l+\alpha) = (\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2})\pi.$$

Dann ist

$$A = \frac{2\pi}{k^2 Q\cos k\alpha}G = \frac{\lambda^2}{2\pi Q\cos k\alpha}G,$$

$$M = -\frac{\lambda^2}{\cos k\alpha}G,$$

$$\tau = (-1)^{\mathfrak{a}}\tfrac{1}{2}\pi.$$

Die stärkste Resonanz der Röhre und der stärkste Schall im freien Raume findet also statt, wenn die Bewegung der Luft am Orte einer Knotenfläche mitgetheilt wird. Die Stärke der Schallwellen wird dabei sehr grofs, aber keinesweges unendlich. Denn damit der im Nenner der Werthe von A und M stehende $\cos k\alpha$ Null werde, müfste die Fläche der Oeffnung gleich Null werden. Dabei zeigt sich zugleich, dafs die Resonanz sowohl in der Röhre als auch im freien Raume desto mächtiger wird, je enger die Oeffnung der Röhre ist. Wenn wie gewöhnlich $k\alpha$ klein ist, kann $\cos k\alpha = 1$ gesetzt werden. ***Dann ist die Wirkung im freien Raume unabhängig von der Form der Röhre. Die Vibrationen der Schwingungsmaxima in der Röhre und der um ganze Wellenlängen von der Oeffnung entfernten Wellen im freien Raume unterscheiden sich dabei von denen der mitgetheilten Bewegung um eine Viertel-Undulation.***

Das Minimum der Resonanz tritt ein, wenn der Factor von A im Werthe von G in (15.) sein Maximum erreicht, d. h. wenn

$$\cos k(l+\alpha) = 1, \qquad k(l+\alpha) = \mathfrak{a}\pi;$$

dann wird mit Weglassung kleiner Gröfsen

$$G\cos k\alpha = A, \qquad \tau = \mathfrak{a}\pi, \qquad M = \frac{QG\cos k\alpha}{2\pi}.$$

Die Wirkung im freien Raume ist also, je nach dem Werthe von α, gleich oder kleiner, als wenn gar keine Röhre vorhanden wäre, und die erschütterte Schlufsplatte der Röhre einen Theil der übrigens festen yz-Ebene bildete.

Die grofse Verschiedenheit der Schallstärke in der Luft bei gleicher Excursionsweite der schwingenden Endplatte der Röhre, von der die Wellen erregt werden, kann überraschen. Sie beruht darauf, dafs, wenn auch die Excursion der Schwingungen dieselbe bleibt, doch die *Arbeit,* die die schwingende Platte durch die Bewegung der Luft leistet, eine aufserordentlich verschiedene ist, je nachdem sie gegen verdichtete oder nicht verdichtete Luft sich vorwärts bewegen mufs. Bei stärkster Resonanz findet am Ende der Röhre auch der stärkste Wechsel von Verdichtung und Verdünnung statt.

Gehen wir jetzt über zu dem anderen Falle, wo der Schall im freien Raume in gröfserer Entfernung von der Oeffnung der Röhre erregt wird, letztere aber an der Stelle $x = -l$ fest geschlossen ist. Da die in dem tönenden Punkte, dessen Coordinaten α, β, γ seien, erregten Wellen von der festen yz-Ebene reflectirt werden, müssen wir uns die Bewegung im freien Raume zusammengesetzt denken aus den Wellen, welche der tönende Punkt erregt, und denen, welche sein Spiegelbild, dessen Coordinaten $-\alpha$, β, γ sind, erregen würde. Setzen wir das Geschwindigkeitspotential Φ dieser Bewegung auf Seite der positiven x im freien Raume

$$(16.) \qquad \Phi = H\left[\frac{\cos(kr_{'}-2\pi nt+c)}{r_{'}}+\frac{\cos(kr_{''}-2\pi nt+c)}{r_{''}}\right],$$

wo $r_{'}$ die Entfernung vom Punkte α, β, γ und $r_{''}$ die von seinem Spiegelbilde $-\alpha$, β, γ bedeutet, so ist an der ganzen yz-Ebene

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

Ist der tönende Punkt weit von der Oeffnung der Röhre entfernt und diese klein gegen die Wellenlänge, so können wir die kleinen Verschiedenheiten des Werthes von Φ in verschiedenen Punkten der Oeffnung vernachlässigen und hier setzen:

$$\overline{\Phi} = G\cos(2\pi nt+\tau_{''}),$$

wo

$$G = \frac{2H}{r_{'}},$$

$$\operatorname{tang}\tau_{''} = -\operatorname{tang}(kr_{'}+c).$$

Innerhalb der Röhre setzen wir dann

$$(16^a.) \qquad \Phi = G\cos kx\cos(2\pi nt+\tau_{,,}).$$

Dann ist Φ an der Oeffnung continuirlich und $\frac{d\Phi}{dx}$ innen und aufsen eben da gleich Null. Innerhalb der Röhre können wir bei dieser Annahme $\frac{d\Phi}{dn}=0$ setzen, indem wir die verschwindend kleinen Werthe, welche es am nicht cylindrischen Theile der Röhre annimmt, vernachlässigen. Nur am verschlossenen Ende ist $\frac{d\Phi}{dx}$ im Allgemeinen nicht gleich Null. Hier müssen wir setzen:

$$\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dx}=0$$

und das Geschwindigkeitspotential im ganzen Raume gleich $\Phi+\Psi$, wo Ψ das von uns früher bestimmte Bewegungspotential der ebenen Wellen in der Röhre, die in den freien Raum übergehen, ist. Dadurch ist allen Bedingungen der Aufgabe genügt. Wir haben also für $x=-l$

$$(16^b.) \qquad -kG\sin kl\cos(2\pi nt+\tau_{,,}) = J\cos(2\pi nt+\tau),$$

also

$$(16^c.) \qquad \begin{cases} \tau_{,,} = \tau+\pi, \\ kG\sin kl = J = A\sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha}+\frac{k^4Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kl}. \end{cases}$$

Das Minimum von A bei gleichen Werthen von G tritt offenbar ein, wenn $\sin kl=0$; dann wird $A=0$, und die Bewegung im freien Raume so, als wäre die Mündung der Röhre gar nicht in der yz-Ebene vorhanden. Das Maximum aber tritt ein, wenn $\cos k(l+\alpha)=0$; dann wird

$$A = kG\frac{2\pi}{k^2Q\cos k\alpha},$$

und wieder wird beim Maximum der Resonanz der Phasenunterschied von einer Viertel-Undulation zwischen den erregenden Wellen und den erregten eintreten. Das Maximum der Resonanz in der an einem Ende geschlossenen Röhre tritt also in beiden Fällen, sowohl wenn der Schall vom geschlossenen als wenn er vom offenen Ende her der Luft der Röhre mitgetheilt wird, ein, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist. Aus dem Reciprocitätsgesetz des Schalles, welches in $(9^a.)$ ausgesprochen ist, läfst sich nun dasselbe Gesetz auch für jede andere Lage des tönenden Punktes ableiten. Es pafst auf unseren Fall direct die Form, welche wir dem Gesetz in $(9^c.)$ gegeben haben. Die dortige Constante A,

welche der Intensität des tönenden Punktes b entspricht, indem dort Φ unendlich wird, wie

$$\Phi = A\frac{\cos kr_b}{r_b}\cos(2\pi nt),$$

wollen wir gleich 1 setzen. Der Werth von $\frac{d\Psi}{dn}$ ist in (9^c.) an der erschütterten Stelle da der Wand gleichgesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B\cos(2\pi nt).$$

Am Grunde der Röhre ist $\frac{d\Psi_a}{dn} = \frac{d\Psi_a}{dx}$, und in dem Falle, wo der Boden der Röhre erschüttert wird, von uns in den Gleichungen (15.) und (15^a.) gesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dx} = G\cos(2\pi nt + \tau_{,,});$$

wir haben also die Constante B der Gleichung (9^c.) mit G zu vertauschen und im Ausdrucke für Ψ statt $2\pi nt$ zu schreiben $2\pi nt - \tau_{,,}$. Aufserdem ist in dem Falle unserer Anwendung nicht blos ein einziges Flächenelement da erschüttert worden, sondern der ganze Boden der Röhre; wir müssen also über diesen integriren, und erhalten so

$$(17.)\qquad 4\pi\Psi_b = -G\int\Phi_a\,d\omega,$$

wo die Integration über den Boden der Röhre auszudehnen ist. Ist nun der tönende Punkt vom Boden der Röhre nur weit genug entfernt, dafs hier ebene stehende Wellen entstehen können, also Φ hier von der Form ist:

$$\Phi = f\cos k(l+x)\cos(2\pi nt + c),$$

so wird aus (17.)

$$4\pi\Psi_b = -fGQ\cos(2\pi nt + c),$$

$$4\pi[\Psi_b'\cos(2\pi nt - \tau_{,,}) + \Psi_b''\sin(2\pi nt - \tau_{,,})] = -fGQ\cos(2\pi nt + c),$$

$$(17^a.)\qquad \begin{cases} 4\pi(\Psi_b'\cos\tau_{,,} - \Psi_b''\sin\tau_{,,}) = -fGQ\cos c, \\ 4\pi(\Psi_b'\sin\tau_{,,} + \Psi_b''\cos\tau_{,,}) = fGQ\sin c, \end{cases}$$

$$4\pi\sqrt{(\Psi_b')^2 + (\Psi_b'')^2} = fGQ.$$

Nun ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für jeden Punkt b proportional der in den Gleichungen (10.) bis (16.) vorkommenden Constanten A, deren Verhältnifs zu G für eine bestimmte Röhrenlänge gegeben ist in Gleichung (15.). Also ist bei wechselnder Röhrenlänge auch f proportional dem Verhältnifs $\frac{A}{G}$.

Dies Verhältnifs wird, wie aus (15.) hervorgeht, ein Maximum, wenn

$$l + \alpha = (2\mathfrak{a} + 1)\tfrac{1}{4}\lambda.$$

Daraus folgt also, dafs auch ***bei einer beliebigen Lage des tönenden Punktes die ebenen Wellen im Innern der Röhre,*** wenn dergleichen überhaupt entstehen, ***das Maximum ihrer Intensität erreichen, wenn die Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist.***

Die ebenen Wellen im Innern einer an beiden Seiten offenen Röhre lassen sich mittelst der aufgestellten Probleme behandeln, wenn die Mündungen der Röhre nach der von uns gemachten Annahme in zwei parallelen festen Ebenen liegen, die den Luftraum in zwei Theile trennen, und der Schall auf der einen Seite von einem weit entfernten tönenden Punkte ausgeht. Auf der einen Seite dieser Wand setzt man das Geschwindigkeitspotential gleich der in den Gleichungen (10.) bis (12.) gebrauchten Function Ψ, auf der anderen Seite gleich der in den Gleichungen (16.) bis (16^c.) vorkommenden Form $\Phi + \Psi$, welche der Resonanz einer Röhre entspricht, in welche der Schall von der offenen Mündung eintritt. Man hat dann nur die Coefficienten der ebenen Wellen in der Röhre in diesen beiden Ausdrücken des Geschwindigkeitspotentials so zu bestimmen, dafs hier beide Functionen identisch werden. Da das weiter keine Schwierigkeiten macht, möge das Gesagte genügen. Die Resonanz in der Röhre wird am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre, an welcher man die Correctionen für beide Mündungen anzubringen hat, ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist.

§. 8.

Wir wollen schliefslich noch eine Reihe von Röhrenformen aufsuchen, für welche mit den bis jetzt bereiten Hülfsmitteln der Analysis sich die Luftbewegung in der Mündung und die reducirte Länge vollständig wenigstens für Schallwellen von so grofser Wellenlänge bestimmen läfst, dafs gegen diese die Dimensionen der Röhrenöffnung ihres Querschnitts und des von der Cylindergestalt abweichenden Theiles der Mündung verschwinden. Die Wand der Röhre sei übrigens eine Rotationsfläche, welche in kleiner Entfernung von der kreisförmigen Mündung, deren Radius R sei, übergeht in einen Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Radius wir R_1 nennen wollen. Wir setzen ferner voraus, dafs auch die Bewegung der Luft überall symmetrisch um die Axe der Röhre vor sich gehe. Wir können nun im All-

gemeinen nicht so zu Werke gehen, dafs wir eine bestimmte Röhrenform annehmen und dazu die Potentiale der Bewegung suchen, sondern wir müssen umgekehrt von der Potentialfunction ausgehen und die dazu gehörige Röhrenform bestimmen, was sich in jedem Falle ausführen läfst. Nur müssen wir eben solche Formen der Potentialfunction suchen, welche Röhren geben, die in kleiner Entfernung von der Mündung in Cylinder übergehen.

Dem Bewegungspotentiale der Luft haben wir die Form gegeben:

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi nt) + \Psi'' \sin(2\pi nt).$$

Für die tieferen Theile der Röhre haben wir in (12^g.) gefunden:

$$(12^k.) \qquad \Psi'' = -\frac{AkQ}{2\pi} \cos kx.$$

Im freien Raume ist aber, wenn wir $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx} = 0$ setzen, welches, wie wir oben schon gefunden haben, mit k verschwindet, nach (11^d.)

$$\Psi'' = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\sin kr_1}{r_1} d\omega,$$

welches innerhalb der Mündung, wo wir kr_1 verschwinden lassen dürfen, wird

$$(12^l.) \qquad \overline{\Psi''} = -\frac{k}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega = -\frac{AkQ}{2\pi}.$$

Sowohl (12^k.) wie (12^l.) giebt innerhalb der Mündung den gleichen Werth von $\overline{\Psi''}$ und den Werth Null für $\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}$. Sie gehen also an der Mündung der Röhre continuirlich in einander über. Längs der festen Wände des Luftraumes geben beide $\frac{d\Psi''}{dn} = 0$, nur an dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand wird dieser Differentialquotient nicht genau Null aber verschwindend klein. Es ist also Ψ'' unter dieser Annahme eine continuirliche Function, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, und kann unmittelbar berechnet werden, nachdem Ψ' gefunden ist.

Die Function Ψ' hat im freien Raume die Form:

$$(18.) \qquad \begin{cases} \Psi' = \int h \frac{\cos kr}{r} d\omega, \\ \text{wo} \quad h = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}. \end{cases}$$

Im Innern der Röhre werden wir ihr eine andere analytische Form Ψ_i geben müssen, welche die Eigenschaft haben mufs:

1) im Innern der Röhre die Bedingung zu erfüllen:

$$(18^a.) \qquad \nabla \Psi_i + k^2 \Psi_i = 0,$$

2) für grofse negative Werthe von x folgende Form anzunehmen:

$$(18^b.) \qquad \Psi_i = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

3) an der Fläche der Oeffnung den Bedingungen zu genügen:

$$(18^c.) \qquad \overline{\Psi_i} = \overline{\Psi'} \quad \text{und} \quad \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} = -2\pi h.$$

Dann wird die Form der Röhre gefunden durch die Bedingung, dafs an der Wand

$$(18^d.) \qquad \frac{d\Psi_i}{dn} = 0,$$

welche Form aber noch der Bedingung genügen mufs, dafs nur für solche Werthe von x, welche gegen die Wellenlänge λ verschwindend klein sind, die Fläche eine merkliche Neigung gegen die x-Axe haben darf, weil wir vorher auch

$$\frac{d\cos kx}{dn} = 0$$

gesetzt haben längs der ganzen Ausdehnung der Röhrenwand, und weil nur unter dieser Bedingung die Form der Röhrenwand von der Wellenlänge unabhängig gefunden wird. Indem wir setzen:

$$\varrho\cos\omega = y, \qquad \varrho\sin\omega = z,$$

und berücksichtigen, dafs nach der Voraussetzung Ψ nur eine Function von ϱ und x, nicht von ω sein soll, wird Gleichung $(18^a.)$

$$(18^e.) \qquad \frac{d^2\Psi_i}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + k^2\Psi_i = 0.$$

Wir setzen:

$$(19.) \qquad \Phi = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx + \Sigma[E_m e^{+x\sqrt{m^2+k^2}} U_{(m\varrho)}],$$

wo E_m beliebige Constanten, $U_{(m\varrho)}$ folgende Function bedeutet:

$$(19^a.) \qquad U_{(m\varrho)} = 1 - \frac{m^2\varrho^2}{2.2} + \frac{m^4\varrho^4}{2.2.4.4} - \frac{m^6\varrho^6}{2.2.4.4.6.6} \quad \text{u. s. w.,}$$

und unter dem Summenzeichen für m diejenigen Werthe zu setzen sind, welche $\frac{dU_{(m\varrho)}}{d\varrho} = 0$ machen, wenn $\varrho = R_1$. Dann ist Φ eine Function, welche der Differentialgleichung $(18^e.)$ Genüge leistet und an der Wand einer cylindrischen Röhre vom Radius R_1 auch der Bedingung genügt, dafs $\frac{d\Phi}{dn} = 0$. In dem Exponenten von e mufs der Wurzel immer das positive Vorzeichen gegeben werden, wenn die Röhre unendlich lang ist, damit Φ für unendliche negative x endlich bleibt. Ist die Röhre aber irgendwo abgeschlossen, so sind

auch negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen, und die Coefficienten derselben so zu bestimmen, dafs die Grenzbedingungen an dem geschlossenen Ende erfüllt werden. Da übrigens der kleinste Werth von mR_1, der die Bedingung $\frac{dU}{d\varrho}$ für $\varrho = R_1$ erfüllt, 3,83171, der zweite 7,01751 ist, während die folgenden sich allmälig der Gröfse $(\alpha + \frac{1}{4})\pi$ nähern, so nehmen alle diese Exponentialfunctionen schnell ab, wenn man sich von dem Ende der Röhre entfernt, an welchem sie einen merklichen Werth haben, und so oft die Länge der Röhre beträchtlich grofs gegen den Durchmesser ist, werden sie in der Mitte oder am anderen Ende derselben zu vernachlässigen sein. Es wird also im Allgemeinen genügen, dafs wir uns auf die Glieder beschränken, für welche die Wurzel im Exponenten ein positives Vorzeichen hat. Da übrigens mR_1 nach dem Gesagten eine endliche, kR_1 aber eine verschwindend kleine Zahl ist, so können wir in dem Exponenten k^2 gegen m^2 vernachlässigen und setzen

$$(19^b.) \qquad \Phi = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx + \Sigma\{E_m e^{mx} U_{(m\varrho)}\}.$$

Diese Function erfüllt also allerdings die Forderung der Gleichungen (18^a.) und (18^b.), welche wir oben für die Function Ψ_i aufgestellt haben, sie wird aber im Allgemeinen nicht der dritten Bedingung (18^c.) entsprechen, dafs, wenn wir setzen:

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx},$$

auch sei:

$$\overline{\Phi} = \overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\frac{\cos kr}{r}\,d\omega,$$

oder, da innerhalb der Oeffnung kr unendlich klein ist, kann man diese Bedingung auch darauf reduciren, dafs sein müfste:

$$\overline{\Phi} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Phi}}{dx}\frac{d\omega}{r}.$$

Wäre diese letztere Bedingung durch besondere Annahmen über die Gröfse der Coefficienten erfüllt, so würde die Gestalt der Röhre einfach cylindrisch sein. Ich habe aber keine Methode finden können, um die Coefficienten dieser Bedingung gemäfs zu bestimmen und somit die Aufgabe für ganz cylindrische Röhren streng zu lösen. Auch läfst sich einsehen, dafs die Convergenz der Reihe für Φ in Gleichung (19.) für diesen Fall eine sehr langsame sein würde, da die Geschwindigkeit der Lufttheilchen $\frac{d\Phi}{dx}$ am Rande der Oeffnung, die durch eine scharfe rechtwinklige Kante begrenzt sein würde, unendlich

grofs wie $(R-\varrho)^{-\frac{1}{3}}$ werden müfste, und daher die Reihe für $\frac{d\Phi}{dx}$ für den Werth $\varrho = R$ und $x = 0$ überhaupt nicht convergiren kann.

Wir fügen deshalb zu Φ noch eine andere Function hinzu, die in gröfserer Entfernung von der Oeffnung verschwindet, also auch nur in der Nähe der Oeffnung Einflufs auf die Gestalt der Röhre ausübt, aber die Continuität an der Oeffnung herstellt.

Bezeichnen wir der Einfachheit wegen die Potentialfunction einer auf der Kreisfläche der Oeffnung mit der Dichtigkeit h verbreiteten Masse mit P_h, also

$$(20.) \qquad P_h = \int h \frac{\cos kr}{r} d\omega,$$

dieses Integral über die ganze Fläche der Oeffnung genommen. Wenn die Distanz des Punktes, für welchen wir P_h bestimmen, von der Oeffnung klein ist, so ist $\cos kr = 1$ und

$$(20^a.) \qquad P_h = \int \frac{h\, d\omega}{r}.$$

Setzen wir ferner

$$(21.) \qquad h = i + l,$$

$$(21^a.) \qquad i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\overline{\Phi}}{dx},$$

und bestimmen wir l so, dafs in der Fläche der Oeffnung

$$(21^b.) \qquad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi},$$

was sich immer ausführen läfst, weil die Vertheilung einer Masse auf einer Kreisscheibe, die an der Oberfläche dieser Scheibe eine Potentialfunction von gegebener Gröfse giebt, nach bekannten Methoden gefunden werden kann. Setzen wir ferner auf Seite der positiven x, wie schon oben geschehen,

$$(21^c.) \qquad \Psi' = P_h = P_i + P_l$$

in der Röhre, also für negative x

$$(21^d.) \qquad \Psi_i = \Phi + P_i - P_l,$$

so genügen die Functionen Ψ' und Ψ_i allen für sie gestellten Bedingungen. Dafs nämlich Ψ' im freien Raume und Ψ_i im Innern der Röhre der Bedingung genügen:

$$(18^a.) \qquad \nabla\Psi + k^2\Psi = 0,$$

ist aus der Bildungsweise dieser Functionen klar. Dafs Ψ_i für grofse Werthe

von $-x$ übergeht in

$$\Psi_i = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

erhellt daraus, dafs P_i und P_l in einer gegen die Oeffnung der Röhre grofsen Entfernung unendlich klein werden, Φ aber wirklich in jene Form übergeht. Da ferner in der Fläche der Oeffnung

$$(21^b.) \qquad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi},$$

wird

$$(21^c.) \qquad \overline{\Psi'} = \overline{\Psi_i} = \overline{P_i} + \overline{P_l}.$$

Da ferner an der Fläche der Oeffnung

$$\frac{dP_i}{dn} = -2\pi i = \tfrac{1}{2}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}$$

und auf Seite der positiven x

$$\frac{dP}{dn} = \frac{d\overline{P}}{dx},$$

auf Seite der negativen aber

$$\frac{dP}{dn} = -\frac{d\overline{P}}{dx},$$

so ist

$$(21^f.) \qquad \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_l}{dn} = -2\pi(i+l).$$

Somit sind die gestellten Bedingungen $(18^a.)$, $(18^b.)$ und $(18^c.)$ erfüllt.

Die Form der Röhrenwand wird endlich durch die Gleichung gegeben:

$$(18^d.) \qquad \frac{d\Psi_i}{dn} = 0.$$

Da wir die Bedingung gemacht haben, dafs, wenn r eine innerhalb des nicht cylindrischen Theiles der Röhre liegende Entfernung ist, k^2r^2 gegen 1 zu vernachlässigen sei, können wir entsprechend der zur Gleichung $(7^d.)$ gemachten Bemerkung in dieser Gleichung der Röhrenwand $k=0$ setzen, werden dann aber natürlich auch die Aufgabe nur für solche Werthe von k als gelöst betrachten dürfen, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Dann ist also für diesen Zweck in der Nähe der Röhrenmündung zu setzen statt $(19^b.)$:

$$(22.) \qquad \Phi = Ax + B + \Sigma\{E_m e^{mx} U_{(m\varrho)}\},$$

$$(20^a.) \qquad P_i = \int \frac{i\,d\omega}{r}, \qquad P_l = \int \frac{l\,d\omega}{r},$$

$$(21^a.),\ (21^b.) \qquad i = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}, \quad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi},$$

$$(21^d.) \qquad \Psi_i = \Phi + P_i - P_l.$$

In der That sind dann auch alle diese Functionen von einer solchen Form, dafs sich ihr Werth in der Nähe der Mündung nicht ändert dadurch, dafs man $k=0$ setzt. Die Bedingung (18^d.) ergiebt, dafs die Röhrenwand eine zu allen Flächen, deren Gleichung $\Psi_i=$ Const. ist, orthogonale Rotationsfläche sein mufs, oder wenn wir die Gleichung der Röhrenwand (und überhaupt der Strömungscurven) ausdrücken durch

$$\varrho\chi = \text{Const.},$$

so mufs sein:

$$(22^a.) \qquad \frac{d\Psi_i}{dx}\frac{d(\varrho\chi)}{dx}+\frac{d\Psi_i}{d\varrho}\frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho}=0.$$

Zu bemerken ist noch, dafs man, um die Form der Function Φ festzustellen, die Gröfse des Radius des cylindrischen Theiles der Röhre R_1 bestimmen mufs, weil von dessen Gröfse die in der Summe vorkommenden Werthe von m abhängen. Um P_i und P_l zu finden, mufs wiederum die Gröfse des Radius der Oeffnuug R festgestellt sein, und schliefslich, wenn man die Röhrenform aus der Gleichung $\frac{d\Psi_i}{dn}=0$ bestimmt, wird die Stromescurve, welche von dem Rande der Oeffnung ausgeht, nicht nothwendig in einen Cylinder vom Radius R_1 übergehen. Um dies nun zu bewirken, mufs man eine der Constanten von Φ durch die oben gefundene Gleichung

$$(12^b.) \qquad AQ = -2\pi M$$

bestimmen, worin in unserem Falle Q der Querschnitt der Röhre

$$Q=\pi R_1^2,$$

$$M=-\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,d\omega=\int(i+l)\,d\omega.$$

Daraus folgt:

$$(22^b.) \qquad AR_1^2 = -2\int(i+l)\,d\omega.$$

Wenn R und R_1 gegeben sind, giebt diese Gleichung eine Bedingung, welche durch die Coefficienten des Ausdrucks für Φ in (22.) erfüllt werden mufs, so dafs einer von ihnen durch die anderen bestimmt werden kann.

§. 9.

Wir wollen endlich noch die Röhrenformen berechnen, welche den einfachsten Annahmen über die Function Φ entsprechen. Setzen wir

$$(23.) \qquad \Phi = \frac{A}{k}\sin kx+B\cos kx,$$

so wird nach (21^a.)

$$(23^a.) \qquad i = -\frac{A}{4\pi}, \quad \int i d\omega = -\tfrac{1}{4} A R^2$$

und in der Ebene der Mündung nach (21^b.)

$$(23^b.) \qquad \overline{P}_l = \tfrac{1}{2} B,$$

woraus nach bekannten Sätzen über Electricitätsvertheilung auf einer leitenden Kreisscheibe folgt, dafs

$$(23^c.) \qquad l = \frac{B}{2\pi^2 \sqrt{R^2 - \varrho^2}}, \quad \int l d\omega = \frac{BR}{\pi}.$$

Somit folgt aus Gleichung (22^b.)

$$(23^d.) \qquad A R_1^2 = \tfrac{1}{2} A R^2 - \frac{2}{\pi} BR.$$

Den Unterschied α der wahren und reducirten Röhrenlänge haben wir oben (12^a.) definirt durch die Gleichung:

$$(12^f.) \qquad -\frac{kB}{A} = \operatorname{tang} k\alpha.$$

Da $k\alpha$ eine sehr kleine Gröfse ist, so oft das Verhältnifs $R_1 : R$ endlich ist, können wir in diesem Falle annähernd setzen:

$$(23^e.) \qquad \alpha = -\frac{B}{A} = \frac{\pi}{2} \frac{R_1^2}{R} - \frac{\pi}{4} R,$$

wodurch für die hier in Betracht kommenden Röhrenformen der Unterschied zwischen wahrer und reducirter Länge gegeben ist, wenn die Radien des Cylinders und seiner Mündung bestimmt sind. Die reducirte Länge der Pfeife ist gleich der wahren, also $\alpha = B = 0$, wenn $R = R_1 \sqrt{2}$.

Wenn die Mündung ebenso weit ist wie der Cylinder, also $R = R_1$, wird $\alpha = \frac{\pi}{4} R$ und $B = -\frac{\pi}{4} RA$. Wenn R sehr klein gegen R_1 ist, wird annähernd

$$\frac{B}{A} = -\frac{\pi R_1^2}{2R} = -\frac{Q}{2R},$$

wie es schon oben für diesen Fall in (12^i.) gefunden ist. Unter diesen Umständen kann natürlich nicht die abgekürzte Form (23^e.) für die Gleichung (12^f.) angewendet werden.

Die Bedeutung der Function χ der Gleichung (22^a.), welche zur Bestimmung der Strömungscurven dient, setzen wir durch folgende Gleichung fest:

$$(24.) \qquad \varrho\chi = \int_0^\varrho \frac{d\Psi_i}{dx} \varrho \, d\varrho,$$

worin unter dem Integralzeichen x einen constanten Werth behält. Daraus folgt zunächst:

$$(24^a.) \qquad \frac{d}{d\varrho}(\varrho\chi) = \varrho\frac{d\Psi_i}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = \int_0^\varrho \frac{d^2\Psi_i}{dx^2}\varrho\, d\varrho.$$

Da wir nun für unseren jetzt vorliegenden Zweck uns erlauben durften in den Functionen Φ, P_i und P_l (s. (22.) und (20^a.)), aus denen Ψ_i zusammengesetzt ist, $k=0$ zu setzen, so reducirt sich die Gleichung (18^e.) in der Nähe der Mündung auf

$$\frac{d^2\Psi_i}{dx^2} = -\frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho},$$

und wir erhalten also

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\int_0^\varrho \left(\varrho\frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{d\Psi_i}{d\varrho}\right) d\varrho,$$

$$(24^b.) \qquad \frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\varrho\frac{d\Psi_i}{d\varrho};$$

aus (24^a.) und (24^b.) folgt, dafs die Function χ der Bedingung genügt:

$$(22^a.) \qquad \frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + \frac{d(\varrho\chi)}{dx}\frac{d\Psi_i}{dx} = 0,$$

und dafs in einer durch die x-Axe gelegten Ebene die Curven

$$\varrho\chi = \text{Const.}$$

orthogonal sind zu den Curven

$$\Psi_i = \text{Const.},$$

erstere also Stromescurven sind.

Wenn wir in die Gleichung (24.) für Ψ_i setzen:

$$(21^d.) \qquad \Psi_i = \Phi + P_i - P_l,$$

so können wir auch χ ähnlich zerfällen

$$(25.) \qquad \chi = \chi_0 + \chi_i - \chi_{ii},$$

$$(25^a.) \qquad \begin{cases} \varrho\chi_0 = \int_0^\varrho \frac{d\Phi}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_i = \int_0^\varrho \frac{dP_i}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_{ii} = \int_0^\varrho \frac{dP_l}{dx}\varrho\, d\varrho. \end{cases}$$

Da sich Φ hier reducirt auf

$$\Phi = Ax + B,$$

so ist

$$(25^b.) \qquad \chi_0 = \tfrac{1}{2} A\varrho.$$

Um die Berechnung von χ_i abzukürzen, bemerke ich Folgendes. Es sei W eine Potentialfunction, die auf Seite der negativen x der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d^2W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho} = 0,$$

und ferner sei

$$(25^c.) \qquad P_i = \frac{dW}{dx},$$

so ist

$$(25^d.) \qquad \varrho\chi_i = \int_0^{\varrho} \frac{d^2W}{dx^2}\varrho\, d\varrho = -\int_0^{\varrho} \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dW}{d\varrho}\right) d\varrho = -\varrho\frac{dW}{d\varrho}.$$

Nun ist P_i die Potentialfunction einer Masse, die mit der constanten Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}$ auf einer Kreisscheibe vom Radius R ausgebreitet ist. Die Gleichung $(25^c.)$ erfüllen wir, wenn wir W zur Potentialfunction eines soliden Cylinders machen, dessen Basis die kreisförmige Röhrenmündung ist, und der von $x=0$ bis $x=+\infty$ reicht und mit Masse von der constanten Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}$ gefüllt ist. Man braucht sich nur den Cylinder um ein unendlich kleines Stück in der Richtung der positiven x verschoben zu denken und die neue Dichtigkeit so wie die neue Potentialfunction von der früheren abzuziehen, so erhält man das angegebene Resultat. Die Gleichung $(25^d.)$ kann man aber schreiben, weil $y=\varrho\cos\omega$:

$$(25^e.) \qquad \chi_i\cos\omega = -\frac{dW}{d\varrho}\cos\omega = -\frac{dW}{dy}.$$

Es ist aber $-\frac{dW}{dy}$ die Potentialfunction der Oberfläche des Cylinders, die mit Masse von der Dichtigkeit $-\frac{A}{4\pi}\cos\omega$ bedeckt ist, wie sich wieder leicht ergiebt, wenn man den Cylinder in Richtung der negativen y unendlich wenig verschoben denkt. Also läfst sich χ_i unmittelbar finden:

$$(26.) \qquad \chi_i = -\frac{A}{4\pi}\int_0^{\infty} da \int_0^{2\pi} \frac{R\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{(x-a)^2+(\varrho-R\cos\omega)^2+R^2\sin^2\omega}}.$$

Der Werth mit Hülfe elliptischer Integrale ausgedrückt ist folgender:

$$(26^a.) \qquad \chi_i = \frac{AR}{\pi}\left\{\frac{\varkappa_i\cos\vartheta}{\varkappa^2\sqrt{1-\varkappa_i^2\sin^2\vartheta}}(K-E)\right.$$
$$\left. -\frac{\varkappa_i\sin\vartheta}{1-\varkappa_i^2\sin^2\vartheta}\left[\tfrac{1}{2}\pi + (K-E)F_\vartheta' - KE_\vartheta'\right]\right\} - c,$$

worin gesetzt ist:

$$\varkappa^2 = \frac{4R\varrho}{x^2+(R+\varrho)^2}, \qquad \varkappa_1^2 = 1-\varkappa^2, \qquad \varkappa_1 \sin\vartheta = \pm\frac{R-\varrho}{R+\varrho},$$

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}}, \qquad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}\, d\omega,$$

$$F'_\vartheta = \int_0^{\vartheta} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\omega}}, \qquad E'_\vartheta = \int_0^{\vartheta} \sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\omega}\, d\omega,$$

$$c = \frac{AR^2}{4\varrho}, \qquad \text{wenn} \qquad \varrho > R,$$

$$c = \frac{A\varrho}{4}, \qquad \text{wenn} \qquad R > \varrho,$$

oder in beiden Fällen:

$$c = \frac{AR}{4}\,\frac{1-\varkappa_1\sin\vartheta}{1+\varkappa_1\sin\vartheta}.$$

Uebrigens ist für $\sin\vartheta$, für $\cos\vartheta$, wie für $\varkappa_1$ immer der positive Werth zu nehmen, der sich aus den obigen Formeln ergiebt.

Endlich ergiebt sich χ_{II} leicht aus den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen, die durch elliptische Coordinaten ausgedrückt sind. Setzen wir

$$x = R\mu s,$$
$$\varrho = R\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+s^2},$$

so ist die Potentialfunction P_l einer Scheibe, auf welcher selbst die Potentialfunction constant gleich $\frac{1}{2}B$ ist,

$$P_l = \frac{B}{\pi}\,\text{arc tang}\,\frac{1}{s}.$$

Die Linien $\mu = C$ sind confocale Hyperbeln und orthogonal gegen die Linien $s = C$, welche confocale Ellipsen sind. Da die letzteren in unserem Falle Curven gleichen Potentials sind, sind die Linien $\mu = C$ Strömungscurven, und wir brauchen die Gröfse $\varrho\chi_{II}$ nur für den Scheitelpunkt derselben in der Scheibe zu bestimmen, so mufs sie denselben Werth in der ganzen Länge haben.

An der Scheibe selbst wird $s = 0$, für sehr kleine Werthe von s und $-x$ wird

$$\mu = \sqrt{1-\frac{\varrho^2}{R^2}}, \qquad s = -\frac{x}{\sqrt{R^2-\varrho^2}},$$

$$P_l = -\frac{B}{\pi}\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{R^2-\varrho^2}}{x},$$

$$\frac{dP_l}{dx} = +\frac{B}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{R^2-\varrho^2}},$$

$$(27.) \qquad \varrho\chi_{II} = \int_0^{\varrho} \frac{d\overline{P_I}}{dx}\varrho\, d\varrho = \frac{BR}{\pi}(1-\mu).$$

Um μ in den bei den elliptischen Integralen gebrauchten Hülfsgröfsen auszudrücken, dient, wenn ϑ für $\varrho > R$ negativ genommen wird, die Gleichung

$$\mu = \sqrt{\frac{2\varkappa_I(1+\sin\vartheta)}{(1+\varkappa_I)(1+\varkappa_I\sin\vartheta)}}.$$

Somit haben wir denn in den Gleichungen (25^b.), (26.) und (27.) die Werthe von χ_0, χ_I und χ_{II}, und die Gleichung der Strömungscurven wird:

$$\varrho(\chi_0+\chi_I+\chi_{II}) = \text{Const.}$$

Soll die Strömungscurve der Röhrenwand entsprechen, so mufs sie durch den Rand der Oeffnung gehen, und die Constante ist:

$$\text{Const.} = \int_0^{R} \frac{d\Psi'}{dx}\varrho\, d\varrho = \tfrac{1}{2}AR_1^2;$$

folglich wird die Gleichung der Röhrenwand

$$(27^b.) \qquad \varrho(\chi_0+\chi_I-\chi_{II}) = \tfrac{1}{2}AR_1^2.$$

Um die Röhrenform zu erhalten, für welche die Differenz zwischen der wahren und reducirten Länge verschwindet, müssen wir $B=0$, $R=R_1\sqrt{2}$ setzen, dann verschwindet auch χ_{II}, und die Gleichung der Röhrenwand reducirt sich auf

$$\varrho\chi_I = \tfrac{1}{2}A(R_1^2-\varrho^2).$$

Es giebt dies eine Röhre mit trompetenförmigem, schwach erweitertem Ende. Die Krümmung der Wand ist überall nach innen convex, und ihr Krümmungshalbmesser, der vom cylindrischen Theile an gegen die Mündung allmälig abnimmt, wird am Rande der Oeffnung zuletzt unendlich klein.

Macht man den Radius der Oeffnung gleich dem der Röhre, so nähert sich die Form der Röhre am meisten einem reinen Cylinder. Es wird dann die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge der Röhre, wie schon oben bemerkt, gleich $\frac{1}{4}\pi R$. Da in diesem Falle die Gröfse

$$\varkappa_I^2\sin^2\vartheta = \frac{(R-\varrho)^2}{(R+\varrho)^2}$$

immer sehr klein bleibt, und also auch $\sin\vartheta$ für alle nicht zu kleinen Werthe von $\varkappa_I$ sehr klein bleibt, kann man zur Berechnung der Röhrenform von $\varkappa=0$ bis $\varkappa=\sin 89^0$ die höheren Potenzen als die erste von $\varkappa_I\sin\vartheta$ und als die zweite von $\sin\vartheta$ vernachlässigen. Die so vereinfachte Gleichung für die Röhrenwand, aus der man $\sin\vartheta$ für eine Reihe von Werthen von $\varkappa_I$ leicht

mit Hülfe der Tafeln von ***Legendre*** berechnen kann, ist:

$$0 = \frac{4\varkappa_1}{\pi\varkappa^2}(K-E) - \sqrt{\frac{2\varkappa_1}{1+\varkappa_1}} + \varkappa_1 \sin\vartheta \left\{ \frac{8\varkappa_1}{\pi\varkappa^2}(K-E) + 6 + \frac{1-\varkappa_1}{\sqrt{2\varkappa_1(1+\varkappa_1)}} \right\}$$
$$- \varkappa_1 \sin^2\vartheta \left\{ \frac{2\varkappa_1}{\pi\varkappa^2}(K-E) - \frac{4E}{\pi} - \frac{1}{4\sqrt{2\varkappa_1(1+\varkappa_1)}} \right\}.$$

Aus den zusammengehörigen Werthen von $\varkappa_1$ und ϑ lassen sich endlich x und ϱ berechnen, deren Werthe in diesem Falle sind:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{2\varkappa_1 \sin\vartheta}{1+\varkappa_1 \sin\vartheta},$$
$$\frac{x}{R} = -\frac{2\varkappa_1 \cos\vartheta}{\varkappa(1-\varkappa_1 \sin\vartheta)}.$$

In der folgenden Tabelle bedeutet demnach $\frac{\varrho - R}{R}$ den Abstand zwischen der Wand unserer Pfeifenform und der des Cylinders, ausgedrückt in Theilen des Radius, und ebenso $\frac{x}{R}$ den Abstand der betreffenden Stelle von der Oeffnung, ausgedrückt in Theilen des Radius.

ang. sin $\varkappa_1$	ϑ	$\frac{\varrho - R}{R}$	$\frac{x}{R}$
0^0	90^0	0	0
1^0	$26^0\ 2'$	0,0153	0,03161
2^0	$15^0\ 42'$	0,0187	0,06787
3^0	$10^0\ 59'$	0,0197	0,10392
4^0	$8^0\ 14'$	0,0198	0,13979
5^0	$6^0\ 26'$	0,0193	0,17556
6^0	$5^0\ 9'$	0,0186	0,21132
7^0	$4^0\ 13'$	0,0177	0,24708
8^0	$3^0\ 30'$	0,0168	0,28291
9^0	$2^0\ 56'$	0,0159	0,31888
10^0	$2^0\ 29'$	0,0149	0,35496
15^0	$1^0\ 11'\ 40''$	0,0107	0,53867
20^0	$0^0\ 37'\ 50''$	0,0075	0,73058
25^0	$0^0\ 21'\ 0''$	0,0051	0,93502
30^0	$0^0\ 12'\ 0''$	0,0035	1,15668

In gröfserer Entfernung von der Scheibe findet man

$$\frac{\varrho - R}{R} = 3\tfrac{1}{2}\left(\frac{2R-x}{2R+x}\right)^2.$$

Am schnellsten ändert die Curve ihre Natur dicht an der Oeffnung. Zwischen $x_1 = 0$ und $x_1 = \sin 1^0$ kann man folgende annähernd richtige Gleichung brauchen:

$$0 = \log\left(\frac{4}{x_1}\right) - 1 + \operatorname{tang}\vartheta\left(\tfrac{3}{2}\pi + \vartheta\right) - \frac{\pi}{4\sqrt{x_1}\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\vartheta\right)}.$$

Wenn x_1 sehr klein wird, verschwindet $\log x_1$ gegen $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$ und $\operatorname{tang}\vartheta$ mufs sehr grofs, ϑ nahe gleich $\frac{1}{2}\pi$ werden, dann ist

$$0 = \operatorname{tang}\vartheta - \frac{1}{8\sqrt{x_1}},$$

oder

$$\frac{\varrho - R}{x} = \frac{\sqrt{2R}}{8\sqrt[4]{(\varrho - R)^2 + x^2}},$$

oder, da x auch sehr klein gegen $\varrho - R$ werden mufs,

$$(\varrho - R)^3 = \tfrac{1}{32} R x^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, dafs die Wandfläche die verlängerte Ebene der Oeffnung an deren Rande tangirt und hier einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser hat.

§. 10.

Das verallgemeinerte Theorem von *Green* liefert uns auch einige allgemeine Gesetze der Schallbewegung für solche Hohlkörper, deren sämmtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, und die mit einer oder mehreren Oeffnungen versehen sind, deren Flächeninhalt sehr klein gegen die ganze Oberfläche des Hohlraumes ist. Da solche Hohlkörper mit kleinen Oeffnungen beim Anblasen oder durch Resonanz sehr tiefe Töne geben, so ist die erstere Bedingung für diese ihre tiefsten Töne immer erfüllt.

Wenn Ψ das Geschwindigkeitspotential im Innern des überall begrenzten Raumes S darstellt, der keine tönenden Punkte enthalten soll, und der Punkt α, β, γ, von welchem ab die Entfernung r gerechnet wird, innerhalb des Raumes S liegt, so ist nach (7^b.)

$$\int \frac{\sin kr}{r} \frac{d\Psi}{dn} d\omega = \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\sin kr}{r}\right) d\omega.$$

Wenn nun alle Dimensionen des Raumes S gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, so können wir kr gegen 1 vernachlässigen, so oft r, wie hier der Fall ist, die Entfernung zweier Punkte, die innerhalb S gelegen sind, bezeichnet. Wir setzen also

$$\frac{\sin kr}{r} = k - \frac{k^3 r^2}{2.3}.$$

Dies in die obige Gleichung eingeführt giebt:

$$(28.)\quad \int \frac{d\Psi}{dn}\,d\omega = \frac{k^2}{2.3}\int \frac{d\Psi}{dn} r^2\,d\omega - \frac{k^2}{3}\int \Psi r \frac{dr}{dn}\,d\omega.$$

Nehmen wir jetzt an der Raum S sei von einer festen Wand umgeben, in der nur eine oder einige Oeffnungen seien, an der festen Begrenzung sei überall $\frac{d\Psi}{dn} = 0$, in den sämmtlichen Oeffnungen aber habe $\frac{d\Psi}{dn}$ endliche positive Werthe. Das Verhältnifs der Fläche sämmtlicher Oeffnungen zur ganzen Oberfläche des Raumes S sei $\eta^2 : 1$, und η eine verschwindend kleine Gröfse, so ist das Integral $\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega$ von derselben Ordnung kleiner Gröfsen wie η^2, das erste Integral rechts $\frac{k^2}{2.3}\int \frac{d\Psi}{dn} r^2\,d\omega$ aber von der Ordnung $k^2 r^2 \eta^2$, also zu vernachlässigen. Lassen wir nun k immer mehr sich der Null nähern, so mufs dabei offenbar das Integral $\int \Psi r \frac{dr}{dn} d\omega$ und also auch die Function Ψ selbst immer gröfser und gröfser werden. Bezeichnen wir $k^2\Psi$ mit χ, so würde χ eine Function sein, die bei abnehmendem k von constanter Gröfsenordnung bleibt, und in eine Function übergeht, welche der Differentialgleichung $\nabla\chi = 0$ in ganzer Ausdehnung des Raumes S genügt, und für welche an der ganzen Oberfläche des Raumes S $\frac{d\chi}{dn} = 0$. Daraus folgt nach den bekannten Sätzen über electrische Potentialfunctionen, dafs χ im ganzen Raume S constant sein müsse.

Dem entsprechend wollen wir nun zeigen, dafs, wenn die Dimensionen des Raumes S überall endlich sind, d. h. wenn man den Raum S nicht durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlicher Gröfse zerlegen kann, dafs dann Ψ höchstens in unendlich kleinen Theilen des Raumes S von der Ordnung η^2 sich um endliche Theile seiner Gröfse von einer Constanten C unterscheiden könne. Wenn Ψ und seine ersten Differentialquotienten nämlich, wie es hier sein soll, innerhalb S überall continuirlich und eindeutig sind, so ist, wie bekannt:

$$\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz = -\int \Psi\frac{d\Psi}{dn}\,d\omega - \iiint \Psi\nabla\Psi\,dx\,dy\,dz,$$

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum S auszudehnen sind. Berücksichtigt man, dafs $k^2\Psi + \nabla\Psi = 0$, und denkt man sich weiter beide Seiten der Gleichung mit einer constanten Gröfse ε^2 multiplicirt, die so gewählt sein soll, dafs $\varepsilon^2\Psi$ eine endliche Gröfse ist, wozu nach Gleichung (28.)

ε^2 von gleicher Ordnung mit $\frac{k^2 r}{\eta^2}$ sein mufs, so erhält man:

$$(28^a.) \qquad \varepsilon^2 \iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$
$$= -\varepsilon^2 \int \Psi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + k^2 \varepsilon^2 \iiint \Psi^2\, dx\, dy\, dz.$$

Da nun die Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindend klein von der Ordnung η^2 sind, so ist es auch das dreifache Integral links. Da hier aber unter dem Integralzeichen eine überall positive Gröfse steht, so können die Werthe von $\varepsilon \frac{d\Psi}{dx}$, $\varepsilon \frac{d\Psi}{dy}$ und $\varepsilon \frac{d\Psi}{dz}$ im Allgemeinen selbst nur von derselben Ordnung kleiner Gröfsen wie η sein, oder wenigstens nur in Theilen des Raumes S, welche selbst von der Ordnung η^2 sind, endlich werden.

Nun denke man die Flächen construirt, welche der Gleichung

$$\Psi = \text{Const.}$$

entsprechen, und für den Theil des Raumes S, welcher zwischen zwei beliebigen solchen Flächen liegt, bilde man das Integral

$$(28^b.) \qquad \varepsilon \iiint \sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\, dx\, dy\, dz = \Xi.$$

Nach dem Vorausgesagten kann dies Integral nur von derselben Ordnung kleiner Gröfsen wie η sein. Man kann nun die Integration so ausführen, dafs man zuerst diejenigen Theile des Integrals zusammennimmt, welche zwischen zwei unendlich nahen Potentialflächen liegen. Es sei $d\omega$ ein Flächenelement einer solchen Fläche, in der das Potential den Werth Ψ hat, dn die Entfernung zwischen $d\omega$ und der nächsten Fläche, an der der Werth des Potentials $\Psi + d\Psi$ ist, dann ist $d\omega\, dn$ ein Element des Volumens und

$$\sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\, d\omega\, dn = d\Psi\, d\omega,$$

also

$$\Xi = \varepsilon \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} d\Psi \int d\omega,$$

wenn Ψ_0 und Ψ_1 die Werthe von Ψ an den äufsersten Potentialflächen sind, zwischen denen man integrirt. Für jeden Werth von Ψ ist nun $\int d\omega$ gleich

dem Flächeninhalt Q desjenigen Theiles der betreffenden Potentialfläche, der innerhalb des Raumes S liegt. Also wird

$$\Xi = \varepsilon \int_{\psi_0}^{\psi_1} Q \, d\Psi,$$

worin Q als Function des Werthes von Ψ anzusehen ist. Wenn nun Q überall endlich ist, darf die Differenz $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$, innerhalb deren die Variable sich ändert, nur von der Ordnung η sein, da der Werth von Ξ von der Ordnung η ist. Oder es mufs, wenn $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$ endlich ist, innerhalb dieses Intervalles Q von der Ordnung η sein. Da nun nach unserer Voraussetzung der Raum S nicht eine solche Gestalt haben darf, dafs man ihn durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlichem Volumen theilen kann, wie das z. B. der Fall sein würde, wenn er aus zwei durch ein röhrenförmiges Stück verbundenen Hohlräumen bestände, so folgt aus dem Gesagten, dafs nur in unendlich kleinen Theilen desselben, und namentlich auch nur in unendlich kleinen Theilen seiner Oberfläche, der Werth von $\varepsilon\Psi$ um eine endliche Grösse von einem constanten Werthe C abweichen könne.

Nach diesen Bemerkungen reducirt sich die Gleichung (28.) auf

$$(28^c.) \qquad \int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = -\frac{k^2 C}{3} \int r \frac{dr}{dn} d\omega = k^2 C S.$$

Wenn wir nämlich die vom Punkte α, β, γ auf die Tangentialebene von $d\omega$ gefällte Normale n nennen, ist $\frac{dr}{dn} = -\frac{n}{r}$, und $-\frac{1}{3} r \frac{dr}{dn} d\omega = \frac{n d\omega}{3}$ gleich dem Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche $d\omega$ und dessen Spitze α, β, γ ist. Deshalb ist:

$$-\tfrac{1}{3} \int r \frac{dr}{dn} d\omega = S.$$

Setzen wir jetzt voraus, der Raum S habe eine Oeffnung, die in einem nahehin ebenen Theile der Wand gelegen sei, dessen Ebene wir äufserlich unendlich verlängert und den freien Raum nach einer Seite begrenzend voraussetzen, wählen wir wie früher diese Ebene als Ebene der yz und verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Oeffnung selbst. Nehmen wir ferner an, dafs die Vibrationen des Hohlraumes erregt werden durch einen Schallwellenzug, der gegen die Oeffnung schlägt. Wir müssen nun an der Oeffnung den Werth von Ψ so bestimmen, dafs er aufsen und innen continuirlich wird und

im Innern in einer gegen die Dimensionen der Oeffnung grofsen Entfernung in den constanten Werth $C\cos(2\pi nt)$ übergeht.

Es sei h eine Gröfse, welche in verschiedenen Punkten der Oeffnung der Röhre verschiedene Werthe hat Wir setzen, indem wir die Integration über die Fläche der Oeffnung ausdehnen, für den freien Raum

$$(29.) \qquad \Psi = \int h \frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r} d\omega + H\cos kx \cos(2\pi nt) + J\cos kx \sin(2\pi nt).$$

Dieses Geschwindigkeitspotential stellt einen Zug ebener Wellen dar, die an der yz-Ebene reflectirt sich in stehende verwandeln, und ein System fortschreitender Wellen, welche von der Oeffnung ausgehen. Statt der unendlich ausgedehnten ebenen Wellen läfst sich übrigens ebenso gut die etwas allgemeinere Voraussetzung der Gleichung (16.) hier anwenden, dafs nämlich die Wellen von einem weit von der Oeffnung entfernten tönenden Punkte ausgehen, dann bekommen sie, wie dort gezeigt, dicht vor der Oeffnung die in (29.) angenommene Form.

An der yz-Ebene ist aufserhalb der Oeffnung $\frac{d\Psi}{dx} = 0$, in der Oeffnung

$$(29^a.) \qquad \frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h \cos(2\pi nt)$$

und annähernd

$$(29^b.) \qquad \overline{\Psi} = \left[\int \frac{h}{r} d\omega + H\right]\cos(2\pi nt) + \left[k\int h\, d\omega + J\right]\sin(2\pi nt).$$

Innerhalb des Raumes S setzen wir dagegen

$$(29^c.) \qquad \Psi = \left[C - \int \frac{h\cos kr}{r} d\omega\right]\cos(2\pi nt).$$

Dann ist in der Oeffnung

$$(29^d.) \qquad \frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h\cos(2\pi nt),$$

$$(29^e.) \qquad \overline{\Psi} = \left[C - \int \frac{h\, d\omega}{r}\right]\cos(2\pi nt).$$

Die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi}}{dx}$ aus $(29^a.)$ und $(29^d.)$ sind identisch. Damit auch die von $\overline{\Psi}$ aus $(29^b.)$ und $(29^e.)$ identisch seien, mufs sein:

$$(29^f.) \qquad J + k\int h\, d\omega = 0,$$

$$(29^g.) \qquad C - H = 2\int \frac{h\, d\omega}{r}.$$

Es mufs also die Gröfse h für die einzelnen Punkte der Oeffnung so bestimmt werden, dafs ihre Potentialfunction innerhalb der Oeffnung constant wird. Die Bedingung endlich, dafs $\frac{d\Psi}{dn}=0$ ist längs der Oberfläche von S mit Ausnahme der Mündung, wird durch die Gleichung (29^c.) erfüllt, wenn die Wand, in der die Oeffnung sich befindet, so weit merklich eben ist, als das Potential von h nicht gegen C verschwindet.

Endlich wird für diesen Fall die Gleichung (28^c.)

$$(29^h.) \qquad 2\pi\int h\,d\omega = k^2 C S.$$

Aus (29^f.) und (29^h.) folgt

$$(29^i.) \qquad J = -\frac{k^3 C S}{2\pi}.$$

Nennen wir nun M die Masse, welche nöthig ist, um, auf der Fläche der Oeffnung passend vertheilt, in dieser die Potentialfunction constant gleich 1 zu machen, so ist

$$(29^k.) \qquad \int h\,d\omega = \tfrac{1}{2}(C-H)M,$$

da die Dichtigkeit h nach (29^g.) den Potentialwerth $\frac{1}{2}(C-H)$ hervorbringt. Wir haben also nach (29^f.)

$$(29^l.) \qquad J+\tfrac{1}{2}k(C-H)M = 0.$$

Das Maximum des Potentials der stehenden Wellen im freien Raume ist $\sqrt{H^2+J^2}$, das Maximum in dem Hohlkörper S ist C. Aus (29^i.) und (29^l.) folgt

$$\frac{H^2+J^2}{C^2} = \left(1-\frac{k^2 S}{\pi M}\right)^2+\left(\frac{k^3 S}{2\pi}\right)^2.$$

Dieses Verhältnifs erreicht seinen Minimalwerth, die Resonanz wird also am stärksten, wenn das erste der beiden Quadrate, gegen welches im Allgemeinen das zweite verschwindend klein ist, gleich Null wird. Die Bedingung für das Maximum der Resonanz ist also:

$$(30.) \qquad \pi M = k^2 S,$$

oder wenn wir statt k seinen Werth setzen durch die Schwingungszahl n und die Schallgeschwindigkeit a ausgedrückt

$$(3^a.) \qquad k = \frac{2\pi n}{a},$$

so ist:

$$(30^a.) \qquad n^2 = \frac{a^2 M}{4\pi S}.$$

Ist die Oeffnung kreisförmig, so ist (s. $(23^b.)$ und $(23^c.)$)

$$M = \frac{2R}{\pi},$$

oder, wenn wir die Fläche der Oeffnung mit s bezeichnen,

$$s = \pi R^2, \qquad M = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{s}{\pi}},$$

$$n = \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi^5}\sqrt{S}}.$$

Wenn wir für die Schallgeschwindigkeit den Werth 332260^{mm} (entsprechend 0^0 und trockner Luft) nehmen, so wird

$$n = 56174\frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}},$$

während *Sondhauſs* aus seinen Versuchen für n die empirische Formel für kreisförmige und quadratische Oeffnungen herleitet:

$$n = 52400\frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}},$$

worin nur der von *Sondhauſs* gegebene Zahlencoefficient halbirt ist, weil *Sondhauſs* nach der Art der französischen Physiker die Schwingungszahlen der Töne doppelt so hoch nimmt, als es nach unserer Bezeichnungsweise geschieht.

Noch besser stimmt die Berechnung für einige Versuche von *Wertheim*, bei denen das Verhältniſs der Oeffnung zum Volumen des Hohlkörpers noch kleiner ist, als bei den Versuchen von *Sondhauſs*. Ich habe aus den Versuchen, welche er mit drei verschiedenen Glaskugeln angestellt hat *), deren Volumen durch Eingieſsen von Wasser verkleinert wurde, diejenigen nach der theoretischen Formel berechnet, bei welchen der Durchmesser der Oeffnung weniger als $\frac{1}{10}$ des Durchmessers einer Kugel war, deren Volumen dem des Hohlraumes gleich ist, und setze die Zahlen hierher, um zu zeigen, wie gut die theoretische Formel mit den Versuchen übereinstimmt.

---

*) Annales de Chimie et de Physique Sér. 3, Tome XXXI, p. 428.

	Durchmesser der Oeffnung.	Volumen des Hohlraumes in Cub. Centm.	$2n$ beobachtet	$2n$ berechnet	△
Erste Kugel. Volumen 6528cc. Temperatur 24°. $a = 346550$.	20mm	6528	184,2	193,1	0,020
		5712	206,4	206,4	0,000
		4896	218,8	222,9	0,008
		4080	232,9	244,2	0,021
Zweite Kugel. Volumen 2030cc. Temperatur 18°. $a = 343030$.	10mm	2030	234,9	242,3	0,013
		1827	262,6	255,5	— 0,012
		1624	285,1	270,9	— 0,022
		1421	300,5	290,3	— 0,015
		1218	320,0	312,9	— 0,010
		1015	345,0	342,7	— 0,003
		812	372,6	383,2	+ 0,008
		609	416,3	442,5	0,026
	15mm	2030	286,0	296,8	0,016
		1827	298,7	322,8	0,020
Dritte Kugel. Volumen 715cc. Temperatur 20°. $a = 344210$.	6mm	715	328,2	317,4	— 0,015
		615	340,4	342,2	+ 0,002
		515	373,7	374,0	0,000
		415	416,3	416,6	0,000
		315	481,2	478,2	— 0,003
		215	581,8	578,8	— 0,002
		115	766,5	791,4	+ 0,014
	10mm	715	384,4	409,7	0,028
		615	411,6	441,8	0,031

Zur Erleichterung der Vergleichung sind in der letzten Rubrik unter △ die Logarithmen des berechneten n dividirt durch das beobachtete n hinzugefügt. Der Logarithmus des halben Tones $\frac{16}{15}$ beträgt 0,028. Die Werthe von △ zeigen, dafs nur bei den verhältnifsmäfsig zur Oeffnung kleineren Werthen des Volumens die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung sich einem halben Tone nähert.

Für Ellipsen von der Excentricität ε und der grofsen Axe R ist die Masse M, welche, auf der Fläche passend vertheilt, in dieser das constante

Potential 1 giebt *),

$$M = \frac{R}{K_\varepsilon},$$

worin K_ε das ganze elliptische Integral erster Gattung für den Modul ε bezeichnet. Es wird also nach (30^a.) für Hohlräume mit einer elliptischen Oeffnung

$$n^2 = \frac{a^2 R}{4\pi K S},$$

oder wenn man den Flächeninhalt s der elliptischen Oeffnung einführt und setzt:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1-\varepsilon^2},$$
$$s = \pi R^2 \varepsilon_1,$$

so wird

$$n = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{\varepsilon_1}}} \cdot \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{\pi^5\sqrt{2S}}}.$$

Der Werth von n^2 ist also von dem für eine kreisförmige Oeffnung gültigen durch den Factor $\frac{\pi}{2K\sqrt{\varepsilon_1}}$ verschieden, und da dieser Factor gröfser ist als 1, so wird der Ton einer elliptischen Oeffnung von gleicher Fläche etwas höher als der einer kreisförmigen.

Hat der Hohlraum noch eine zweite Oeffnung, die ebenfalls in einem nahehin ebenen Theile der Wand liegt, so setze man für den äufseren vor ihr liegenden Raum

$$\Psi = \int h_1 \frac{\cos(kr - 2\pi nt + \tau)}{r} d\omega,$$

in dem ihr benachbarten Theile des inneren Raumes

$$\Psi = \left[C_1 - \int \frac{h_1 \cos kr}{r} d\omega\right] \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega . \sin(2\pi nt - \tau).$$

Es sind wie vorher an der Oeffnung die Werthe von $\frac{d\overline{\Psi}}{dn}$ übereinstimmend. die Werthe von $\overline{\Psi}$ werden:

$$\overline{\Psi} = \int \frac{h_1 d\omega}{r} \cdot \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau),$$

$$\overline{\Psi} = \left[C_1 - \int \frac{h_1 d\omega}{r}\right] \cos(2\pi nt - \tau) + k \int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau).$$

Es mufs also sein:

$$C_1 = 2 \int \frac{h_1 d\omega}{dr},$$

---

*) S. *Clausius* in *Poggendorff*'s Annalen LXXXVI S. 161.

und setzen wir wie bei der ersten Oeffnung in (29^k.)

$$\int h_1 d\omega = \tfrac{1}{2} C_1 M_1,$$

so wird in den von der Oeffnung entfernteren Stellen des inneren Raumes

$$\Psi = C_1 \cos(2\pi nt - \tau) + \tfrac{1}{2} k C_1 M_1 \sin(2\pi nt - \tau).$$

Dies mufs aber gleich werden dem früher festgesetzten Werthe von Ψ im Innern der Kugel:

$$\Psi = C \cos(2\pi nt).$$

Daraus folgt, dafs

$$C_1[\cos\tau - \tfrac{1}{2} k M_1 \sin\tau] = C,$$
$$\sin\tau + \tfrac{1}{2} k M_1 \cos\tau = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dafs τ sehr klein ist, und demgemäfs aus der ersten, dafs mit Vernachlässigung kleiner Gröfsen

$$C = C_1.$$

Nun wird aus Gleichung (28^c.)

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 2\pi \int h \, d\omega + 2\pi \int h_1 \, d\omega = k^2 CS$$

oder

$$(31.) \qquad \pi M(C - H) + \pi M_1 C = k^2 CS,$$

dazu

$$J = -\frac{k^3 CS}{2\pi},$$

$$(31^a.) \qquad \frac{H^2 + J^2}{C^2} = \frac{(\pi(M + M_1) - k^2 S)^2}{\pi^2 M^2} + \frac{k^3 S}{2\pi}.$$

Damit $\frac{H^2 + J^2}{C^2}$ ein Minimum werde, und die stärkste Resonanz eintrete, setzen wir

$$(31^b.) \qquad \pi(M + M_1) = k^2 S,$$

durch welche Gleichung die Tonhöhe der stärksten Resonanz bestimmt ist, wie es in (30.) für eine Oeffnung geschehen war. Diese Gleichung stimmt, wenn die Oeffnungen geometrisch ähnlich sind, mit dem von *Sondhaufs* aus den Versuchen abgeleiteten Gesetze. Sind beide Oeffnungen congruent, so verhält sich die Schwingungszahl des Körpers zu der desselben Körpers mit einer Oeffnung, wie $\sqrt{2}:1$. Der Ton ist also im ersten Falle um eine verminderte Quinte höher als im zweiten Falle, was genau mit einigen Versuchen von *Sondhaufs* *) übereinstimmt.

Heidelberg, im März 1859.

---

*) *Poggendorffs* Annalen LXXXI S. 366.

Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Die Theorie der Trägheitsmomente läfst sich in eine Beziehung zu der Theorie der confocalen Oberflächen setzen, welche einige bemerkenswerthe Folgerungen mit sich führt. Bezeichnen wir durch M die Masse des Körpers, durch Ma^2, Mb^2, Mc^2 die Trägheitsmomente für die drei Hauptaxen, welche man durch den Schwerpunkt legen kann, so dafs a, b, c für diese Hauptaxen diejenigen Längen bezeichnen, denen man bisweilen den Namen der Trägheitsradien beigelegt hat. Sind ferner α, β, γ die Winkel welche eine durch den Schwerpunkt gelegte Drehungsaxe mit den Hauptaxen bildet, so ist das Trägheitsmoment für diese Axe bekanntlich

$$(1.) \qquad \mathrm{M} = M(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma).$$

Ist ferner ϱ der Trägheitsradius für diese Axe und sind u, v, w die Ebenencoordinaten derjenigen Ebene, welche die Drehungsaxe zur Normale hat und vom Schwerpunkte um ϱ entfernt ist, so hat man die Gleichungen

$$(2.) \qquad \cos\alpha = -\varrho u, \qquad \cos\beta = -\varrho v, \qquad \cos\gamma = -\varrho w,$$

und die Gleichung (1.) geht über in:

$$(3.) \qquad 1 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoides, dessen Hauptaxen a, b, c sind, und welches in Punktcoordinaten die Gleichung hat:

$$(4.) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Dies Ellipsoid, welches dem Folgenden zu Grunde gelegt werden soll, will ich das *zweite Centralellipsoid* nennen, im Gegensatz zu dem sonst betrachteten, dessen Radien den Quadratwurzeln der reciproken Trägheitsmomente proportional sind. Man hat also zunächst den Satz:

Satz 1.

Das Loth, welches vom Schwerpunkte auf eine Tangentenebene dieses Ellipsoides gefällt wird, ist gleich dem Trägheitsradius für die Drehungsaxe, welche das Loth selbst darstellt.

Ich will jetzt die Hauptaxen aufsuchen, welche man durch irgend einen anderen Punkt des Körpers führen kann. Sind die Coordinaten dieses Punktes x, y, z, so wird der Ausdruck für das Trägheitsmoment einer Axe, welche durch ihn gelegt ist, erhalten, indem man zu (1.) den Ausdruck Md^2 hinzufügt, wo d den Abstand der neuen Drehungsaxe vom Schwerpunkte ausdrückt. Daher nimmt der neue Trägheitsradius den Werth an:

$$(5.)\quad \varrho^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma + (x^2+y^2+z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

oder, wenn man $x^2+y^2+z^2 = r^2$ setzt und wieder Ebenencoordinaten einführt, für welche der Punkt (x, y, z) der Anfangspunkt der Coordinaten ist,

$$(6.)\quad 1 = (a^2+r^2)u^2 + (b^2+r^2)v^2 + (c^2+r^2)w^2 - (ux+vy+wz)^2.$$

Dies ist wiederum die Gleichung eines Ellipsoides, welches den Punkt (x, y, z) zum Mittelpunkt und die Trägheitsradien der durch ihn gelegten Axen zu Normalen der Tangentenebenen hat. Um die Hauptaxen dieses Ellipsoides oder die Richtungen der Drehungsaxen mit gröfsten und kleinsten Trägheitsmomenten zu finden, ist nur der Ausdruck

$$u^2+v^2+w^2 = \frac{1}{\varrho^2}$$

zu einem Minimum zu machen. Dies giebt für die Richtung und Gröfse des fraglichen Radius aus (5.):

$$\begin{aligned}(a^2+r^2-\varrho^2)\cos\alpha &= x(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma),\\ (b^2+r^2-\varrho^2)\cos\beta &= y(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma),\\ (c^2+r^2-\varrho^2)\cos\gamma &= z(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma),\end{aligned}$$

wodurch sich die cubische Gleichung für ϱ^2 ergiebt:

$$(7.)\quad 1 = \frac{x^2}{a^2+r^2-\varrho^2} + \frac{y^2}{b^2+r^2-\varrho^2} + \frac{z^2}{c^2+r^2-\varrho^2},$$

während

$$(8.)\quad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{x}{a^2+r^2-\varrho^2} : \frac{y}{b^2+r^2-\varrho^2} : \frac{z}{c^2+r^2-\varrho^2}.$$

Daher hat man den folgenden Satz:

Satz 2.

Die Hauptaxen des Ellipsoides (6.), ***d. h. die Maximumswerthe der Trägheitsradien für den Punkt*** (x, y, z) ***fallen in die Richtung der Normalen der drei zu dem Centralellipsoid*** (4.) ***confocalen Oberflächen, welche sich durch diesen Punkt legen lassen. Die Gröfsen dieser Haupt-***

axen sind $\sqrt{r^2+\lambda^2}$, $\sqrt{r^2+\mu^2}$, $\sqrt{r^2+\nu^2}$, ***wenn*** λ, μ, ν ***die Parameter der drei confocalen Oberflächen sind, und*** r ***die Entfernung des gegebenen Punktes vom Schwerpunkt bedeutet.***

Aus der Form der Gleichung (7.) folgt ferner, in Bezug auf die Gröfse der Hauptträgheitsradien, indem $a > b > c$ vorausgesetzt wird:

Satz 3.

Von den Hauptträgheitsradien für den Punkt (x, y, z) ***ist immer einer kleiner als*** $\sqrt{c^2+r^2}$, ***ein zweiter liegt zwischen*** $\sqrt{c^2+r^2}$ ***und*** $\sqrt{b^2+r^2}$, ***der dritte zwischen*** $\sqrt{b^2+r^2}$ ***und*** $\sqrt{a^2+r^2}$.

Man kann aber das Ellipsoid (6.) seinerseits als Basis eines confocalen Systems ansehen und die drei diesem confocalen Oberflächen aufsuchen, welche durch den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des ersten Systems, gelegt werden können. Nach einem bekannten Reciprocitätsgesetze, welches für solche Systeme gültig ist, kann man dann den Satz aufstellen:

Satz 4.

Kennt man das Ellipsoid (6.) ***für irgend einen Punkt des Körpers und führt drei ihm confocale Oberflächen durch den Schwerpunkt, so sind die Normalen dieser drei Oberflächen die Richtungen der Hauptaxen des Schwerpunktes und wenn*** l, m, n ***die Parameter dieser Oberflächen bezeichnen, so sind*** $\sqrt{l^2-r^2}$, $\sqrt{m^2-r^2}$, $\sqrt{n^2-r^2}$ ***die Werthe der Hauptträgheitsradien für den Schwerpunkt.***

Diese Construction gilt auch noch, wenn man für den Schwerpunkt einen beliebigen Punkt annimmt, welcher auf der Verbindungslinie desselben mit dem gegebenen Punkte liegt. Nur ist dann an die Stelle des Ellipsoides (6.) ein anderes zu setzen, welches ihm ähnlich ist.

Die Gleichung (7.) ist noch in einer anderen Weise bemerkenswerth. Sucht man nämlich diejenigen Punkte des Körpers auf, welche einen Hauptträgheitsradius gemeinsam haben, so hat man in der Gleichung (7.) nur ϱ als constant zu betrachten. ***Diese Gleichung stellt dann eine Oberfläche von demselben Character dar wie die in der Optik betrachtete Oberfläche, deren Radien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Strahlen in krystallinischen Medien angeben;*** und während man dem Parameter ϱ verschiedene Werthe beilegt, erhält man ein System von gewissermafsen confocalen Oberflächen dieser Art, welche sich in drei vollkommen gesonderte Klassen

scheiden, jenachdem ϱ^2 zwischen c^2 und b^2 oder zwischen b^2 und a^2 liegt, oder endlich gröfser als a^2 ist. Die in der Optik betrachtete Oberfläche gehört zu der letzten Klasse.

Sucht man nun solche Punkte des Körpers auf, für welche zwei Hauptträgheitsradien einander gleich werden, so müssen für diese Punkte die Gleichungen (8.), welche die Richtungen der Hauptaxen angeben, unbestimmt werden, d. h. es mufs einer der Fälle eintreten:

$$x = 0 \text{ und } a^2 + r^2 - \varrho^2 = 0 \text{ oder}$$
$$y = 0 \text{ und } b^2 + r^2 - \varrho^2 = 0 \text{ oder}$$
$$z = 0 \text{ und } c^2 + r^2 - \varrho^2 = 0.$$

Die Curve, auf welcher der Punkt (x, y, z) liegen mufs, hat dann also eins der folgenden drei Systeme zu Gleichungen:

$$x = 0 \text{ und } 1 = \frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} \text{ oder}$$

$$y = 0 \text{ und } 1 = \frac{z^2}{c^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2 - b^2} \text{ oder}$$

$$z = 0 \text{ und } 1 = \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2}.$$

Diese Curven, von denen die erste imaginär, die zweite eine Hyperbel, die dritte eine Ellipse ist, sind keine andern, als die Focallinien der Oberfläche (4.). Man hat also den Satz:

Satz 5.

Diejenigen Punkte, für welche zwei Hauptträgheitsmomente gleich werden, bilden die Focallinien des Centralellipsoides (4.). *Und zwar sind, wie aus* (8.) *folgt, die Richtungen der beiden gleichen Hauptaxen die Tangente der Focalcurve und eine Axe des Ellipsoides* (4.), *während die ungleiche Axe die Normale der Focallinie im Hauptschnitte wird.*

Man bemerkt leicht, *dafs dieselben Punkte zugleich die Reihe von Doppelpunkten constituiren, welche das Oberflächensystem* (7.) *aufweist.* Die Doppelpunkte der optischen Oberflächen bilden die Focalhyperbel; die Focalellipse gehört denjenigen Oberflächen an, für welche ϱ^2 zwischen b^2 und a^2 liegt. Für die Oberflächen endlich, bei denen ϱ^2 zwischen c^2 und b^2 liegt, werden sämmtliche Doppelpunkte imaginär.

Für die Punkte der Focalhyperbel sind die gröfseren Trägheitsmomente einander gleich, für die Punkte der Ellipse die kleineren. Man sieht, dafs

alle drei Hauptträgheitsmomente nur dann einander gleich werden können, wenn diese beiden Curven einen Punkt, d. h. ihren Scheitel, gemeinsam haben, oder wenn $b=c$ ist. Alsdann gehen zugleich die Focallinien in ein Punktenpaar über, welches durch $x=\sqrt{a^2-b^2}$ gegeben ist. Dies ist ein Resultat, welches sehr bekannt ist, aber auf ganz anderem Wege gewonnen zu werden pflegt.

Das Ellipsoid (3.) oder (4.) hängt mit dem *Poinsot*schen Centralellipsoide sehr genau zusammen, so dafs vermöge des geometrischen Princips der Reciprocität die für das eine gewonnenen Resultate sich auf das andere leicht übertragen lassen. Dies führt zu einigen neuen Sätzen über die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt, wenn keine Kräfte auf den Körper wirken. Einige der hauptsächlichsten dieser Sätze, welche den von *Poinsot* aufgestellten ganz analog werden, sind folgende:

1. *Zieht man in dem Ellipsoide* (4.) *denjenigen Radius vector, der die Axe des mittleren Paares der Bewegungsgröfsen darstellt, so ist die ihr conjugirte Ebene oder die in seinem Endpunkte gelegte Tangentenebene die Ebene der Drehung des Körpers, ihre Normale die augenblickliche Drehungsaxe.*

2. *Die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ist dem auf diese Tangentenebene gefällten Lothe umgekehrt proportional.*

3. *Die Länge des betrachteten Radius vector und seine Lage im Raume bleibt während der ganzen Bewegung constant. Es giebt also einen gewissen Kegel, welcher durch den Schnitt des Ellipsoides* (4.) *mit einer Kugel hindurchgeht, dessen Seiten successive die Stelle dieses Radius vector einnehmen.* (Dieser Satz findet sich schon bei *Poinsot*).

4. *Die auf einander folgenden Drehungsebenen des Körpers sind die Tangentenebenen einer abwickelbaren Oberfläche, welche gleichzeitig zwei Oberflächen zweiter Ordnung mit gemeinschaftlichem Mittelpunkte und gleich gerichteten Hauptaxen berührt, von denen eine das Ellipsoid* (4.) *ist. Diese Oberfläche schneidet jede der im Körper festen Coordinatenebenen in einem Kegelschnitte.*

5. *Dieselben Drehungsebenen umhüllen im Raume einen transscendenten Kegel mit unendlich vielen Windungen, dessen Spitze in den Endpunkt des unter* 1. 3. *erwähnten Radius fällt. Dieser Kegel entspricht der Serpoloide Poinsots.*

Carlsruhe, den 22. Februar 1859.

Note über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

(Von Herrn *S. Spitzer* zu Wien.)

Im vorigen Bande Seite 149 ist eine Abhandlung aus den hinterlassenen Papieren *Jacobi*s durch Herrn *E. Heine* über die Differentialgleichung

$$(1.) \qquad x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y = 0$$

mitgetheilt worden. Ich habe dieselbe Gleichung in dem speciellen Falle, wo $\alpha = \beta$ ist, untersucht, und habe gefunden, dafs die Differentialgleichung

$$(2.) \qquad x(1-x)y''+[\gamma-(2\alpha+1)x]y'-\alpha^2 y = 0$$

ein Integral hat von folgender Gestalt:

$$(3.) \qquad y = C_1\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\,du + C_2\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\log\frac{u(1-u)}{x-u}\,du,$$

vorausgesetzt dafs diese bestimmten Integrale einen Sinn haben, d. h. dafs $\gamma-\alpha$ ein positiver Bruch, und x so beschaffen ist, dafs $(x-u)^{-\alpha}$ für die Integrationsgrenzen und innerhalb derselben nicht unendlich wird; C_1 und C_2 bedeuten willkürliche Integrationsconstanten.

Ich werde, um die Richtigkeit meiner Behauptung darzuthun, den in (3.) aufgestellten Werth von y einer zweifachen Differentiation unterwerfen und die so erhaltenen Werthe von y' und y'' in die Gleichung (2.) substituiren. Thut man dies zuerst mit dem ersten particularen Integrale in (3.), so hat man:

$$(4.) \qquad \begin{cases} y = \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\,du, \\ y' = -\alpha\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-1}\,du, \\ y'' = \alpha(\alpha+1)\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}\,du \end{cases}$$

und somit

$$x(1-x)y''+[\gamma-(2\alpha+1)x]y'-\alpha^2 y$$
$$= \alpha\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}[x(\alpha+1)(1-x)-\gamma(x-u)$$
$$+x(x-u)(2\alpha+1)-\alpha(x-u)^2]\,du.$$

Reducirt man dies, so findet man:

$$x(1-x)y''+[\gamma-(2\alpha+1)x]y'-\alpha^2 y$$
$$= \alpha\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}[(\alpha-\gamma-u+1)x+\gamma u-\alpha u^2]\,du.$$

Läfst man die Grenzen aufser Acht, so hat dieses Integral den Werth

$$\alpha u^{\alpha-\gamma+1}(1-u)^{\gamma-\alpha}(x-u)^{-\alpha-1},$$

folglich ist das bestimmte Integral gleich Null, wenn $\gamma-\alpha$ ein positiver echter Bruch ist, und folglich genügt in diesem Falle das in (4.) stehende Integral der Differentialgleichung (2.).

Ich wende mich nun zu dem zweiten particularen Integrale in (3.)

$$(5.)\qquad y = \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\log\frac{u(1-u)}{x-u}\,du$$

und erhalte:

$$y' = -\alpha\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-1}\log\frac{u(1-u)}{x-u}\,du$$
$$-\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-1}\,du,$$
$$y'' = \alpha(\alpha+1)\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}\log\frac{u(1-u)}{x-u}\,du$$
$$+(2\alpha+1)\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}du;$$

somit ist:

$$x(1-x)y''+[\gamma-(2\alpha+1)x]y'-\alpha^2 y$$
$$= \alpha\int_0^1 \log\frac{u(1-u)}{x-u}\,\frac{d}{du}[u^{\alpha-\gamma+1}(1-u)^{\gamma-\alpha}(x-u)^{-\alpha-1}]\,du$$
$$+\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}[x(2\alpha+1)(1-x)-\gamma(x-u)+x(2\alpha+1)(x-u)]\,du.$$

Nun folgt durch theilweise Integration:

$$\int \log\frac{u(1-u)}{x-u}\,\frac{d}{du}[u^{\alpha-\gamma+1}(1-u)^{\gamma-\alpha}(x-u)^{-\alpha-1}]\,du$$

$$= u^{\alpha-\gamma+1}(1-u)^{\gamma-\alpha}(x-u)^{-\alpha-1}\log\frac{u(1-u)}{x-u}$$

$$-\int u^{\alpha-\gamma+1}(1-u)^{\gamma-\alpha}(x-u)^{-\alpha-1}\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{1-u}+\frac{1}{x-u}\right]du,$$

folglich für Werthe von $\gamma-\alpha$, die positiv und kleiner als 1 sind:

$$\int_0^1 \log\frac{u(1-u)}{x-u}\,\frac{d}{du}[u^{\alpha-\gamma-1}(1-u)^{\gamma-\alpha}(x-u)^{-\alpha-1}]\,du$$

$$= -\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}[(1-u)(x-u)-u(x-u)+u(1-u)]\,du.$$

Man hat daher nach einigen Reductionen:

$$x(1-x)y''+[\gamma-(2\alpha+1)x]y'-\alpha^2 y$$

$$= -\alpha\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}(x-2ux+u^2)\,du$$

$$+\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}[x(2\alpha+1)(1-u)-\gamma(x-u)]\,du$$

oder

$$x(1-x)y''+[\gamma-(2\alpha+1)x]y'-\alpha^2 y$$

$$= \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha-2}[(\alpha-\gamma-u+1)x+\gamma u-\alpha u^2]\,du,$$

was dem frühern zu Folge gleich Null ist; folglich genügt wirklich der Gleichung (2.) das Integral (3.).

Ist α eine ganze negative Zahl, etwa gleich $-m$, so läfst sich, wie leicht einzusehen, das erste particulare Integral in folgender Form wiedergeben:

$$y = A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx^m,$$

unter A_0, A_1, A_2, ... A_m constante Zahlen verstanden.

Wien. 1859.

Bemerkung zur vorstehenden Note.

(Vom Herausgeber.)

Die von Herrn *Spitzer* für den besonderen Fall des Zusammenfallens der beiden Elemente α, β gegebene vollständige Integration der Differentialgleichung (1.) der hypergeometrischen Reihe ergiebt sich ohne Rechnung aus ihrer Integration im allgemeinen Fall.

Unter den bekannten auf Seite 152 des vorigen Bandes angeführten Integralen der Differentialgleichung (1.) befindet sich das folgende mit 3) bezeichnete:

$$x^{-\alpha} F\Big(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\Big),$$

wo das Zeichen F in der von *Gauss* eingeführten Bedeutung genommen ist. Abgesehen von einem constanten Factor ist dies bekanntlich

$$= \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(x-u)^{-\alpha}\,du,$$

welches der Kürze wegen mit $\varphi(\alpha, \beta)$ bezeichnet werden möge. Dann hat man wegen der Symmetrie der Differentialgleichung (1.) in Bezug auf α und β die beiden particularen Integrale

$$\varphi(\alpha, \beta) \quad \text{und} \quad \varphi(\beta, \alpha).$$

An der Stelle des letzteren kann man auch als zweites particulares Integral das folgende

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta) - \varphi(\beta, \alpha)}{\alpha - \beta}$$

betrachten, dessen wahrer Werth für $\alpha = \beta$

$$= \left\{\frac{\partial\varphi(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varphi(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right\}_{(\alpha=\beta)},$$

d. h. nach Einführung des bestimmten Integrals, welches mit $\varphi(\alpha, \beta)$ bezeichnet worden ist,

$$= \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\log\frac{u(1-u)}{x-u}\,du$$

gefunden wird, während das erstere in $\varphi(\alpha, \alpha)$, d. h. in

$$\int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\,du$$

übergeht. So erhält man die beiden particularen Integrale der Differentialgleichung (2.), welche Herr *Spitzer* durch wirkliche Differentiirung verificirt hat.

Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y$$

durch bestimmte Integrale.

(Von Herrn *S. Spitzer* zu Wien.)

Kummer hat im 19ten Bande dieses Journals die Gleichungen der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$$

auf eine sinnreiche Weise in dem Falle integrirt, wo m eine ganze positive Zahl ist. In dem hier vorliegenden Aufsatze will ich zeigen, wie sich die Gleichung

$$(1.) \qquad x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \varepsilon y,$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ und m eine ganze Zahl ist, die $> 2n$, durch eine Methode, die die gröfste Analogie mit der ***Kummer***schen hat, integriren läfst.

Es sei

$$(2.) \qquad z = \psi(x)$$

das complete Integral der Gleichung

$$(3.) \qquad x^{m+1} \frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}} = \varepsilon z,$$

so hat man für die Gleichung

$$(4.) \qquad x^m \frac{d^n y}{dx^n} = -\varepsilon y$$

folgendes Integral:

$$(5.) \qquad y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{x}{u}\right) du,$$

wenn man nur zwischen den $n+1$ willkürlichen Constanten, die in Folge der Gleichung (3.) in dieses Integral eintreten, eine gewisse Bedingungsgleichung aufstellt.

Um dies zu beweisen, bringe ich die Gleichung (4.) in folgende Form:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\varepsilon x^{-m} y$$

und differentiire diese. Man erhält alsdann:

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = -\varepsilon x^{-m} \frac{dy}{dx} + m\varepsilon x^{-m-1} y$$

oder mit x^{m+1} multiplicirt:

$$(6.) \qquad x^{m+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = -\varepsilon x\frac{dy}{dx} + m\varepsilon y.$$

Setzt man hierin den in (5.) stehenden Werth, so hat man, da

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{x}{u}\right) du,$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty u^{m-2} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi'\left(\frac{x}{u}\right) du,$$

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \int_0^\infty u^{m-n-2} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi^{(n+1)}\left(\frac{x}{u}\right) du$$

ist, folgende Gleichung:

$$(7.) \qquad x^{m+1}\int_0^\infty u^{m-n-2} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi^{(n+1)}\left(\frac{x}{u}\right) du$$

$$= -\varepsilon x\int_0^\infty u^{m-2} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi'\left(\frac{x}{u}\right) du + m\varepsilon\int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{x}{u}\right) du.$$

Die Gleichung (3.) läfst sich auch so schreiben:

$$x^{m+1}\psi^{(n+1)}(x) = \varepsilon\psi(x),$$

und hieraus geht hervor:

$$\frac{x^{m+1}}{u^{m+1}}\psi^{(n+1)}\left(\frac{x}{u}\right) = \varepsilon\psi\left(\frac{x}{u}\right).$$

Wird nun der sich hieraus ergebende Werth von $x^{m+1}\psi^{(n+1)}\left(\frac{x}{u}\right)$ in die Gleichung (7.) eingeführt, so erhält man

$$(8.) \qquad \int_0^\infty u^{2m-n-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{x}{u}\right) du$$

$$= -x\int_0^\infty u^{m-2} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi'\left(\frac{x}{u}\right) du + m\int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{x}{u}\right) du,$$

welche Gleichung identisch ist, wenn

$$u^m e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{x}{u}\right)$$

sowohl für $u = 0$ als auch für $u = \infty$ verschwindet. Denn man hat:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big[u^m e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big)\Big] = m u^{m-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big) - u^{2m-n-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}}\psi\Big(\frac{x}{u}\Big)$$

$$- x u^{m-2} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}}\psi'\Big(\frac{x}{u}\Big),$$

welche Gleichung, nach u von 0 bis ∞ integrirt, unter der gemachten Voraussetzung ein mit (8.) übereinstimmendes Ergebnifs liefert.

Beispiele. Die Gleichung

$$(9.) \qquad x^{2n+2}\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} = z$$

hat zum Integral:

$$(10.) \qquad z = x^n\Big[C_1 e^{-\frac{\mu_1}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2}{x}} + \cdots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1}}{x}}\Big],$$

woselbst

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots \quad \mu_{n+1}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^{n+1} = 1$$

sind, und C_1, C_2, $\ldots$ C_{n+1} willkürliche Constanten bedeuten. Man überzeugt sich von der Richtigkeit des Integrals (10.) am einfachsten dadurch, dafs man die Exponentialgröfsen in unendliche Reihen verwandelt, dieselben mit x^n multiplicirt, und dann diese Reihen in die Gleichung (9.) einführt.

Die Gleichung

$$(11.) \qquad x^{2n+1}\frac{d^n y}{dx^n} = -y$$

hat zum Integral:

$$(12.) \quad y = x^n\int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}\Big[C_1 e^{-\frac{\mu_1 u}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 u}{x}} + \cdots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} u}{x}}\Big]du,$$

wo wieder $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n+1}$ die $n+1$ Wurzeln der Gleichung $\mu^{n+1}=1$ sind, und C_1, C_2, $\ldots$ C_{n+1} willkürliche Constanten bedeuten, zwischen denen eine gewisse Bedingung obwaltet, die nun aufzustellen ist.

Zu dem Behufe substituire ich das gefundene Integral (12.) in die Gleichung (11.), werde aber vorher der Einfachheit halber das Integral (12.) umgestalten. Denn da y sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$y = -x^n\int_0^\infty\Big[C_1 e^{-\frac{\mu_1 u}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 u}{x}} + \cdots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} u}{x}}\Big]\frac{de^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}}{du}du,$$

so erhält man durch theilweise Integration:

$$y = -x^{n-1}\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}\left[C_1\mu_1 e^{-\frac{\mu_1 u}{x}} + C_2\mu_2 e^{-\frac{\mu_2 u}{x}} + \cdots + C_{n+1}\mu_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1}u}{x}}\right]du,$$

falls

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_{n+1} = 0$$

gesetzt wird, oder in vereinfachter Form:

$$y = -x^{n-1}\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \sum_{r=1}^{r=n+1}\left[C_r\mu_r e^{-\frac{\mu_r u}{x}}\right]du.$$

Entwickelt man die Exponentialgröfse $e^{-\frac{\mu_r u}{x}}$ in eine Reihe, so hat man

$$y = -\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \sum_{r=1}^{r=n+1} C_r\left[\mu_r x^{n-1} - \frac{\mu_r^2 x^{n-2}u}{1!} + \frac{\mu_r^3 x^{n-3}u^2}{2!} - \cdots\right]du,$$

und dies giebt n mal differentiirt, unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\mu_r^{n+1} = 1, \qquad \frac{d^n\left(\frac{1}{x^k}\right)}{dx^n} = (-1)^n\frac{(k+n-1)!}{(k-1)!\,x^{k+n}},$$

folgenden Werth:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \sum_{r=1}^{r=n+1} C_r\left[\frac{u^n}{x^{1+n}} - \frac{\mu_r u^{n+1}}{1!\,x^{2+n}} + \frac{\mu_r^2 u^{n+2}}{2!\,x^{3+n}} - \cdots\right]du,$$

oder mit x^{2n+1} multiplicirt:

$$x^{2n+1}\frac{d^n y}{dx^n} = -x^n\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} u^n \sum_{r=1}^{r=n+1}\left[C_r e^{-\frac{\mu_r u}{x}}\right]du,$$

was vermöge der Gleichung (12.) in

$$(11.) \qquad x^{2n+1}\frac{d^n y}{dx^n} = -y$$

übergeht. Es ist demnach das complete Integral der Gleichung (11.)

$$y = -x^{n-1}\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}\left[C_1\mu_1 e^{-\frac{\mu_1 u}{x}} + C_2\mu_2 e^{-\frac{\mu_2 u}{x}} + \cdots + C_{n+1}\mu_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1}u}{x}}\right]du,$$

wo zwischen den $n+1$ Constanten $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$ die Bedingungsgleichung

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_{n+1} = 0$$

obwaltet.

Nun ist es leicht das Integral der folgenden Gleichung:

$$(13.) \qquad x^{2n}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y$$

aufzustellen, denn man hat hierfür

$$y = \int_0^\infty v^{2n-1} e^{-\frac{v^{n+1}}{n+1}} \psi\left(\frac{x}{v}\right) dv,$$

worin $\psi\left(\frac{x}{v}\right)$ auf folgende zwei Arten dargestellt werden kann:

$$\psi\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{x^n}{v^n}\int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}\left[C_1 e^{-\frac{\mu_1 uv}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 uv}{x}} + \cdots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} uv}{x}}\right] du,$$

$$\psi\left(\frac{x}{v}\right) =$$

$$-\frac{x^{n-1}}{v^{n-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}\left[C_1\mu_1 e^{-\frac{\mu_1 uv}{x}} + C_2\mu_2 e_2^{-\frac{\mu_2 uv}{x}} + \cdots + C_{n+1}\mu_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} uv}{x}}\right] du,$$

und wofür die Bedingung

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_{n+1} = 0$$

statt findet. Somit ist das Integral der Gleichung (13.):

$$(14.) \qquad y =$$

$$x^n \int_0^\infty \int_0^\infty u^n v^{n-1} e^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}}\left[C_1 e^{-\frac{\mu_1 uv}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 uv}{x}} + \cdots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} uv}{x}}\right] du\, dv,$$

oder in anderer Form:

$$(15.) \qquad y = -x^{n-1}\int_0^\infty \int_0^\infty v^n e^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}}\left[C_1\mu_1 e^{-\frac{\mu_1 uv}{x}} + C_2\mu_2 e^{-\frac{\mu_2 uv}{x}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + C_{n+1}\mu_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} uv}{x}}\right] du\, dv.$$

Schreibt man

$$v^n e^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}} dv = -de^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}},$$

so läfst sich das Integral in (15.) durch theilweise Integration folgendermafsen darstellen:

$$(16.) \qquad y = x^{n-2}\int_0^\infty \int_0^\infty u e^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}}\left[C_1\mu_1^2 e^{-\frac{\mu_1 uv}{x}} + C_2\mu_2^2 e^{-\frac{\mu_2 uv}{x}} + \cdots \right.$$

$$\left. + C_{n+1}\mu_{n+1}^2 e^{-\frac{\mu_{n+1} uv}{x}}\right] du\, dv,$$

falls zwischen den $n+1$ Constanten noch die Bedingungsgleichung

$$C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + \cdots C_{n+1}\mu_{n+1} = 0$$

stattfindet. — Dieses in (16.) aufgestellte Integral hat $n+1$ willkürliche, nur durch zwei Bedingungen beschränkte Constanten und leistet der Differentialgleichung (13.) Genüge. Denn man hat:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty ue^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}} \sum_{r=1}^{r=n+1} C_r\left[\mu_r^2 x^{n-2} - \frac{\mu_r^3 x^{n-3} uv}{1!} + \frac{\mu_r^4 x^{n-4} u^2 v^2}{2!} - \cdots\right] du\,dv$$

und somit:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^\infty \int_0^\infty ue^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}} \sum_{r=1}^{r=n+1} C_r\left[\frac{u^{n-1}v^{n-1}}{x^n} - \frac{\mu_r u^n v^n}{1!\,x^{n+1}} + \frac{\mu_r^2 u^{n+1} v^{n+1}}{2!\,x^{n+2}} - \cdots\right] du\,dv.$$

Diese Gleichung mit x^{2n} multiplicirt giebt:

$$x^{2n}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = x^n \int_0^\infty \int_0^\infty v^{n-1} u^n e^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}} \sum_{r=1}^{r=n+1}\left[C_r e^{-\frac{\mu_r uv}{x}}\right] du\,dv,$$

was vermöge der Gleichung (14.) übergeht in:

$$(13.) \qquad x^{2n}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y.$$

Somit hat man für das Integral der Gleichung (13.):

$$y = x^{n-2}\int_0^\infty \int_0^\infty ue^{-\frac{u^{n+1}+v^{n+1}}{n+1}}\left[C_1\mu_1^2 e^{-\frac{\mu_1 uv}{x}} + C_2\mu_2^2 e^{-\frac{\mu_2 uv}{x}} + \cdots + C_{n+1}\mu_{n+1}^2 e^{-\frac{\mu_{n+1}uv}{x}}\right] du\,dv$$

mit folgenden zwischen den Constanten stattfindenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \cdots + C_{n+1} &= 0, \\ C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + \cdots + C_{n+1}\mu_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Wien, 1859.

Ueber einige geometrische Sätze.

(Von Herrn *von Staudt* zu Erlangen.)

1. Das Product aus dem Inhalte Π eines Tetraeders $ABCD$ in den Halbmesser r der um dasselbe beschriebenen Kugelfläche ist durch die drei Producte $DA.BC$, $DB.AC$, $DC.AB$ bestimmt. Bezeichnet man diese Producte durch a, b, c, die Hälfte ihrer Summe durch s und die Quadratwurzel aus dem Producte $s(s-a)(s-b)(s-c)$ durch ω, so ist $6\Pi.r = \omega$ *).

Wenn nämlich die eine von zwei zu einander parallelen Ebenen, welche den Abstand h von einander haben, die erwähnte Kugelfläche im Punkte D berührt, so schneidet die andere die Geraden DA, DB, DC in drei Punkten A_1, B_1, C_1, so dafs

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1 = 2rh$$

ist. Wenn man ferner den Inhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ durch $\triangle_1$, den Inhalt des Tetraeders $A_1B_1C_1D$ durch Π_1, das Product $DA.DB.DC$ durch p und das Product $DA_1.DB_1.DC_1$ durch p_1 bezeichnet, so ist:

$$3\Pi_1 = \triangle_1 h, \quad \Pi p_1 = \Pi_1 p, \quad p p_1 = 8r^3 h^3.$$

Da nun wegen Aehnlichkeit der Dreiecke DBC, DC_1B_1 die Producte $DB.B_1C_1$, $DC_1.BC$ einander gleich sind, so folgt, wenn man beide mit $DA.DC$ multiplicirt, dafs $p.B_1C_1 = 2rha$ ist. Da ebenso $p.A_1C_1 = 2rhb$ und $p.A_1B_1 = 2rhc$, so ist $p^2\triangle_1 = 4r^2h^2\omega$, demnach $3\Pi_1 p^2 = 4r^2h^3\omega$, also auch $3\Pi p p_1 = 4r^2h^3\omega$ und mithin $6\Pi r = \omega$.

Ist $h = \frac{p}{4r^2}$, folglich $2rh = \frac{p}{2r}$, so ist

$$2r.DA_1 = DB.DC, \quad 2r.DB_1 = DA.DC, \quad 2r.DC_1 = DA.DB,$$
$$2r.B_1C_1 = a, \qquad 2r.A_1C_1 = b, \qquad 2r.A_1B_1 = c,$$
$$4r^2\triangle_1 = \omega \text{ und mithin } \Pi = \tfrac{2}{3}r\triangle_1.$$

2. Ist $\triangle$ der Inhalt des Dreiecks ABC, u aber das Product aus der kleinsten DP und gröfsten DQ von allen Strecken, welche von dem Punkte D an den Umfang K des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises gezogen werden können, so ist $\triangle u = \omega$, wo ω den vorigen Ausdruck bedeutet.

Wenn nämlich der Punkt D aufserhalb der Ebene ABC liegt und von derselben den Abstand d hat, so ist nach dem vorigen Satze $2\triangle dr = \omega$.

*) Vergleiche *Crelle* (mathematische Aufsätze I, p. 117) und *Joachimsthal* Bd. 40, p. 33 dieses Journals.

Da aber r auch der Halbmesser des um das Dreieck DPQ beschriebenen Kreises ist, so ist nach einem bekannten Satze $2dr = DP.DQ$ und folglich $\triangle u = \omega$. Liegt der Punkt D in der Ebene ABC aber aufserhalb der Kreislinie K, so seien A_1, B_1, C_1 diejenigen Punkte dieser Linie, welche aus den Punkten A, B, C durch die Geraden AD, BD, CD projicirt werden. Wenn man nun wieder das Product $DA.DB.DC$ durch p, das Product $DA_1.DB_1.DC_1$ durch p_1 und den Inhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ durch $\triangle_1$ bezeichnet, so hat man die Gleichungen:

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1 = u,$$
$$p.B_1C_1 = ua, \quad p.A_1C_1 = ub, \quad p.A_1B_1 = uc,$$

woraus hervorgeht, dafs $p^2\triangle_1 = u^2\omega$ ist. Weil aber die Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$ in einen und denselben Kreis beschrieben sind, so ist

$$\frac{\triangle}{\triangle_1} = \frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{DA}{DB_1}\cdot\frac{DC}{DA_1}\cdot\frac{DB}{DC_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{p^2}{u^3},$$

mithin $\triangle u = \triangle_1 \cdot \frac{p^2}{u^2} = \omega$.

Wenn endlich der Punkt D in der Linie K liegt, so fällt P mit D zusammen, daher in diesem Falle DP und also auch $u = 0$. In diesem Falle ist aber das gröfste der drei Producte a, b, c der Summe der beiden übrigen gleich und daher auch $\omega = 0$. Bemerkt wird noch, dafs, wenn der Punkt D von allen Punkten der Linie K gleichweit absteht, unter u das Quadrat dieses Abstandes zu verstehen ist.

3. Wenn m das geometrische Mittel zwischen der kleinsten und gröfsten von allen Strecken ist, welche aus dem Punkte D an eine durch die drei Punkte A, B, C, aber nicht durch den Punkt D gehende Kreislinie gezogen werden können, so hat das Dreieck, dessen Seiten die Längen $\frac{DA.BC}{m}$, $\frac{DB.AC}{m}$, $\frac{DC.AB}{m}$ haben, mit dem Dreiecke ABC gleichen Inhalt. Ist ABC ein gleichseitiges Dreieck, so hat das gleichseitige Dreieck, dessen Seite m ist, mit dem Dreiecke gleichen Inhalt, dessen Seiten den Strecken DA, DB, DC gleich sind.

4. Entsprechen den Punkten A, B, C, D der einen von zwei Kugelflächen, welche projectivisch auf einander bezogen sind, die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 der anderen, so ist, wie sich leicht nachweisen läfst:

$$DA.BC : DB.AC : DC.AB = D_1A_1.B_1C_1 : D_1B_1.A_1C_1 : D_1C_1.A_1B_1.$$

Zwei Sätze über das gröfste Product aus ganzen Zahlen von gegebener Summe.

(Von Herrn *Oettinger* zu Freiburg i. B.)

---

1. Um unter allen Producten aus r positiven ganzen Zahlen von gegebener Summe N das gröfste zu erhalten, bringe man N in ganzen Zahlen auf die Form

$$N = rk - \nu$$

und zwar in der Art, dafs für ν sein kleinster nicht negativer Werth also eine der Zahlen 0, 1, 2, ... $r-1$ gesetzt wird, alsdann ist das gröfste der betrachteten Producte

$$(k-1)^{\nu} . k^{r-\nu}.$$

2. Ist die Anzahl r der ganzen positiven Zahlen von gegebener Summe N, aus denen das Product zu bilden ist, willkürlich, und will man über dieselbe so verfügen, dafs man das gröfste der unter 1. gefundenen Maxima erhält, so setze man in der früheren Lösung $k = 3$ und gebe dem ν wiederum seinen in diesem Falle kleinsten nicht negativen Werth, d. h. man bringe N in ganzen Zahlen auf die Form

$$N = 3r - \nu$$

und zwar in der Art, dafs ν einer der Zahlen 0, 1, 2 gleich wird, alsdann ist das Maximum *aller* ganzzahligen Producte von der Factorensumme N das folgende

$$2^{\nu} . 3^{r-\nu}.$$

Gustav Lejeune-Dirichlet.

Am 5ten Mai d. J. verloren die mathematischen Wissenschaften in *Gustav Lejeune-Dirichlet* ihren tiefsten Forscher. Die Trauerkunde von seinem Tode, die sich sogleich durch unser Vaterland und in alle für Wissenschaft empfänglichen Länder verbreitet hat, ist den Lesern dieses Journals schon bekannt. Aber eine Zeitschrift, in welcher der Verewigte den bedeutendsten Theil seiner Arbeiten niedergelegt hat, kann nicht mit Stillschweigen ein solches Ereignifs vorübergehen lassen.

Dirichlet ist wiederum einer jener grofsen Mathematiker, welche der Wissenschaft mitten in ihrer vollen Kraft entrissen werden. Seine Schriften sind, wie die *Gaufsischen,* nicht bedeutend nach ihrer Zahl, aber sie bilden eine Reihe von Meisterwerken. Schon in seinen ersten Veröffentlichungen zeigt sich eine gleichzeitige Beschäftigung mit den höchsten Theilen der Infinitesimal-Rechnung und mit der Theorie der Zahlen. Jede dieser Disciplinen, besonders die erstere, hatte ihm bereits Bereicherungen von hervorragender Wichtigkeit zu verdanken, als er — im weiteren Verfolg seiner Laufbahn — zu der Verwirklichung des tiefen Gedankens geführt wurde, beide bis dahin getrennten Zweige der mathematischen Forschung durch Einführung der Methoden der Infinitesimalrechnung in die Zahlentheorie zu vereinigen. *Dirichlet* wird für alle Zukunft als Erfinder dieser Verbindung zwischen Zahlentheorie und Analysis des Unendlichen genannt werden, einer Verbindung, die schon bisher zu den merkwürdigsten Ergebnissen geführt hat. Was auch in anderen Gebieten als unvergängliche Frucht seiner Geistesarbeit auf die Nachwelt kommt, hierin wird man immer die höchste Entfaltung seiner schaffenden Kraft erkennen.

Dirichlet gehörte nicht, wie *Euler* und *Jacobi,* zu jenen universellen Analysten, denen jeder Gedanke zur Formel sich verkörpert und jede Formel wiederum zu einem Gedanken Anlafs giebt, auch nicht zu jenen unerschrockenen Rechnern, die durch ein Labyrinth von Formeln hindurch zu dem gewünschten Ziele vordringen, er war vielmehr einer jener wenigen Mathematiker, von denen gesagt werden kann, dafs ihre ganze Thätigkeit ein Wirken des Gedankens sei. Seine umfassendsten Arbeiten machte er im

Kopf, und höchstens kurze Zwischenrechnungen schrieb er auf einzelne Blätter nieder. So ist es gekommen, dafs sich bei seinem Tode von den grofsen Entwürfen, mit denen man ihn beschäftigt wufste, fast nichts vorgefunden hat und nur *eine* Arbeit hydrodynamischen Inhalts in so fertiger Form, dafs man hoffen darf, sie bald veröffentlicht zu sehen.

Liegt hierin für Jeden ein Grund, den Verlust *Dirichlets* in gesteigertem Mafse zu beklagen, so kommen für seine Schüler und für Alle, die ihm nahe standen, noch andere von nicht geringerem Gewicht hinzu.

Der aufserordentliche Mann verband mit seinen schöpferischen Eigenschaften eine Lehrgabe, die auf den gegenwärtigen Zustand der Mathematik in unserem Vaterlande von durchgreifendem Einflufs gewesen ist. Seine Vorlesungen „über die Theorie der Zahlen", „über die nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte", „über partielle lineare Differentialgleichungen" und „über bestimmte Integrale" werden, nach sorgfältigen Nachschriften abgedruckt, die besten Lehrbücher über diese Gegenstände bilden.

Die allgemeine Denk- und Handlungsweise *Dirichlets* war durch Einfachheit der Sitten, Bescheidenheit und Wohlwollen bezeichnet. Er war von einer Wahrheitsliebe und einer Offenheit, die sich unter allen Verhältnissen treu blieben. Dafür geben auch seine mathematischen Schriften Zeugnifs, denn er hat nicht blofs die grofsen Ergebnisse seiner Untersuchungen, sondern auch die Gedanken, von denen er dahin geleitet worden war, unverhüllt dargestellt und es so seinen Zeitgenossen möglich gemacht, ihm auf den Wegen, die er betreten hatte, zu folgen.

Am 1sten Juni 1859.

Borchardt.

Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

§. 1.

Allgemeine Gleichungen.

Die allgemeinen Principien, mit deren Hülfe *Jacobi* die Gleichungen der Bewegung auf die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung zurückgeführt hat, sobald eine Kräftefunction existirt, gestatten in demselben Falle eine Anwendung auf die Ermittelung der Gleichgewichtsfigur eines Fadens, welche ebenso auf ein Problem der Variationsrechnung zurückkommt; und es ist nicht ohne Interesse für diese Aufgabe die entsprechenden Betrachtungen durchzuführen, zumal dieselben auch für die Rechnung einige Vereinfachungen darzubieten scheinen.

Bezeichnen wir durch ds das Bogenelement des Fadens, durch Uds die Kräftefunction, endlich durch T die Spannung, welche der Faden in dem Elemente ds erfährt, so sind bekanntlich die Gleichungen, von welchen die Gestalt des Fadens abhängt:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}=0, \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0, \\ \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)+\frac{\partial U}{\partial z}=0. \end{cases}$$

Dieselben erhält man auch aus der Aufgabe, *das Integral*

$$(2.)\quad \int_{s_0}^{s_1} U\,ds$$

zu einem Minimum zu machen, während die Gleichung besteht:

$$(3.)\quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Zugleich läfst sich aber das Problem auf Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen, indem man sich eine Function V von

x, y, z, s so bestimmt denkt, dafs

$$(4.)\quad \begin{cases} T\frac{dx}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad T\frac{dy}{ds} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad T\frac{dz}{ds} = \frac{\partial V}{\partial z}, \\ -U = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds}. \end{cases}$$

Indem man aus diesen Gleichungen die Differentiale eliminirt, erhält man die beiden Gleichungen:

$$(5.)\quad T = -\frac{\partial V}{\partial s} - U,$$

$$(6.)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial s} + U\right)^2;$$

deren letztere eine partielle Differentialgleichung ist, von welcher V eine allgemeine Lösung. Enthält diese drei willkürliche Constanten h, a, b, so werden dann endlich

$$(7.)\quad \varkappa = \frac{\partial V}{\partial h}, \quad \alpha = \frac{\partial V}{\partial a}, \quad \beta = \frac{\partial V}{\partial b}$$

die Gleichungen der Fadencurve, während $\varkappa$, α, β neue willkürliche Constanten bezeichnen.

Hierbei kann die Kräftefunction U den Bogen s noch in beliebiger Weise enthalten, indem derselbe bei Bildung der Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ als Constante behandelt wird. Ist aber insbesondere U von s frei, so darf man in der Gleichung (6.) setzen:

$$(8.)\quad \frac{\partial V}{\partial s} = h;$$

alsdann nimmt die vollständige Lösung dieser Gleichung die Gestalt

$$(9.)\quad V = hs + f(x, y, z)$$

an, und die erste der Gleichungen (7.) giebt ohne Weiteres den Bogen als Function der Coordinaten:

$$(10.)\quad \varkappa = s + \frac{\partial f}{\partial h}.$$

Da dies in den meisten Fällen eintritt, so wird demnach in der Regel an die Stelle der Gleichung (6.) die einfachere:

$$(11.)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = (h + U)^2$$

zu setzen sein; und die Spannung nimmt den einfacheren Ausdruck

$$(12.)\quad T = -h - U$$

an; ein Ausdruck, welcher wesentlich positiv sein mufs und daher im Allgemeinen Beschränkungen für die Werthe der Integrationsconstanten herbeiführt.

§. 2.

Kettenlinie.

Die einfachste Anwendung dieser Gleichungen bildet die Kettenlinie. Ist G das Gewicht der Längeneinheit des Fadens, ferner die Z-Axe vertical nach unten gerichtet, so ist $U = Gz$, und in der Gleichung (11.) darf man dann setzen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{(h+Gz)^2 - a^2 - b^2}$$

oder auch, indem man die XZ-Ebene zur Ebene des Fadens wählt, $b = 0$; wodurch dann

$$V = hs + ax + \int dz \sqrt{(h+Gz)^2 - a^2}.$$

Und somit würden die Gleichungen der Kettenlinie aus (7.):

$$\alpha = x - \int \frac{a\,dz}{\sqrt{(h+Gz)^2 - a^2}} = x - \frac{a}{G} \log\left((h+Gz) + \sqrt{(h+Gz)^2 - a^2}\right),$$

$$z = s + \int \frac{(h-Gz)\,dz}{\sqrt{(h-Gz)^2 - a^2}} = s - \frac{1}{G}\sqrt{(h+Gz)^2 - a^2}.$$

Die Spannung aber ist nach (5.)

$$T = -h - Gz.$$

Es wäre überflüssig die weitere Behandlung dieser Gleichungen zu verfolgen.

§. 3.

Faden unter dem Einflufs der Centrifugalkraft.

Ich will nunmehr einen Faden betrachten, dessen Endpunkte mit einer gleichförmig rotirenden Axe fest verbunden sind. Abstrahirt von der Schwerkraft, kommt allein die Centrifugalkraft zur Wirkung; und ist also die Z-Axe Drehungsaxe, ω die constante Winkelgeschwindigkeit, G wiederum das Gewicht der Längeneinheit, so ist

$$U = \frac{G\omega^2}{g} \int (x\,dx + y\,dy) = \frac{G\omega^2}{2g} r^2,$$

mit r die Entfernung des Elements ds von der Drehungsaxe bezeichnet. Das Integral (2.) nimmt dann die Gestalt an:

$$\int r^2\,ds,$$

und man erhält also den Satz:

Die Gestalt des Fadens wird eine solche, dafs sein Trägheitsmoment ein Maximum ist.

Führt man nun in der Gleichung (11.) statt x, y die Polarcoordinaten r, φ ein, so erhält man nach einer bekannten Transformationsformel die Differentialgleichung:

$$(13.) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 = \mu^2(h^2-r^2)^2,$$

wo nur $\mu = \frac{G\omega^2}{2g}$ und $-\mu h^2$ an die Stelle von h gesetzt ist. Das Letztere ist dadurch gerechtfertigt, dafs die Spannung den Ausdruck

$$(14.) \quad T = \mu(h^2-r^2)$$

annimmt, welcher in der That, da er positiv sein mufs, einen positiven Werth der Constanten μh^2 erfordert.

In der Gleichung (13.) aber darf man nun setzen:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \mu . a, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \mu \cdot b,$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\mu}{r}\sqrt{r^2(h^2-r^2)^2-a^2r^2-b^2};$$

und so erhält man für die Function V den Ausdruck:

$$(15.) \quad V = -h^2 s + az + b\varphi + \int \frac{dr}{r}\sqrt{r^2(h^2-r^2)^2-a^2r^2-b^2},$$

indem man den gemeinsamen Factor μ übergeht. Man sieht daher, ***dafs die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit auf die Gestalt des Fadens ohne Einflufs ist.***

Die Integrale des Problems werden aber nach (7.) die folgenden:

$$(16.) \quad \begin{cases} z = -s + \int \frac{(h^2-r^2)\,r\,dr}{\sqrt{r^2(h^2-r^2)^2-a^2r^2-b^2}}, \\ \alpha = z - a\int \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2(h^2-r^2)^2-a^2r^2-b^2}}, \\ \beta = \varphi - b\int \frac{r\,dr}{r^2\sqrt{r^2(h^2-r^2)^2-a^2r^2-b^2}}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs die z-Coordinate sich durch ein elliptisches Integral der ersten Gattung, der Bogen sich durch eines der zweiten ausdrückt, der Winkel φ durch eines der dritten. Oder es drückt sich r rational durch $\operatorname{sin am}(pz)$ aus, während s, φ durch die Functionen Z und Π mit demselben Argumente sich darstellen.

Um diese Darstellungsweise zu entwickeln, ist es zunächst nöthig, die Gröfse unter dem Wurzelzeichen zu betrachten. Dieselbe nimmt

für	$r=\infty$,	$r=h$,	$r=0$
die Werthe an:	$+\infty$,	$-(a^2h^2+b^2)$,	$-b^2$.

Die cubische Gleichung

$$(17.) \qquad R = r^2(h^2-r^2)^2 - a^2r^2 - b^2 = 0$$

hat also jedenfalls eine reelle Wurzel zwischen $r^2=h^2$ und $r^2=\infty$. Aber da nach (14.) immer $r^2<h^2$ sein mufs, so mufs nothwendig die Wurzelgröfse auch zwischen $r^2=0$ und $r^2=h^2$ einen reellen Werth annehmen, mithin, da R für beide Grenzen negativ ist, innerhalb derselben zweimal das Zeichen wechseln. Die Gleichung $R=0$ hat daher drei reelle positive Wurzeln, deren zwei kleiner, eine gröfser als h^2.

Setzen wir also

$$(18.) \qquad R = (r^2-\varrho^2)(r^2-\sigma^2)(r^2-\tau^2),$$

wo

$$\varrho > \sigma > \tau.$$

Die Vergleichung von (17.), (18.) giebt dann:

$$(18^a.) \qquad \begin{cases} h^2 = \dfrac{\varrho^2+\sigma^2+\tau^2}{2}, \qquad b^2 = \varrho^2\sigma^2\tau^2, \\ h^4 - a^2 = \varrho^2\sigma^2 + \sigma^2\tau^2 + \tau^2\varrho^2, \quad \text{oder} \\ a^2 = \dfrac{(\varrho^2+\sigma^2+\tau^2)^2}{4} - (\varrho^2\sigma^2+\sigma^2\tau^2+\tau^2\varrho^2) \\ \quad = \frac{1}{4}(\varrho+\sigma+\tau)(\varrho+\sigma-\tau)(\varrho-\sigma+\tau)(\varrho-\sigma-\tau). \end{cases}$$

Damit also a, b, h reell seien, haben ϱ, σ, τ nur noch der Bedingung zu genügen, dafs

$$(19.) \qquad \varrho \gtrless \sigma+\tau.$$

Da nun ferner r zwischen σ und τ liegen mufs, so kann man setzen:

$$(19.) \qquad \begin{cases} r^2 = \sigma^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \tau^2 \cos^2 \operatorname{am} u \\ \quad = \tau^2 + (\sigma^2-\tau^2)\sin^2 \operatorname{am} u; \end{cases}$$

und wenn man dies in (18.) einführt, so wird

$$(20.) \qquad \begin{cases} R = (\varrho^2-\tau^2)(\sigma^2-\tau^2)^2 \Delta^2 \operatorname{am} u \cos^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} u, \\ \dfrac{r\,dr}{\sqrt{R}} = \dfrac{du}{\sqrt{\varrho^2-\tau^2}}, \qquad k^2 = \dfrac{\sigma^2-\tau^2}{\varrho^2-\tau^2}; \end{cases}$$

wodurch die Gleichungen (16.) die Gestalt annehmen:

$$(21.)\quad \begin{cases} \sqrt{\varrho^2-\tau^2}\,(s+\varkappa) = \int_0^u ((h^2-\tau^2)-(\sigma^2-\tau^2)\sin^2\mathrm{am}\,u)\,du, \\ \sqrt{\varrho^2-\tau^2}\,\dfrac{z-\alpha}{a} = u, \\ \sqrt{\varrho^2-\tau^2}\,\dfrac{\varphi-\beta}{b} = \int_0^u \dfrac{du}{\tau^2+(\sigma^2-\tau^2)\sin^2\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

Ferner sei, um das letzte Integral auf die gewöhnliche Gestalt der dritten Gattung zu bringen,

$$(22.)\quad \sigma^2-\tau^2 = -\tau^2 k^2 \sin^2\mathrm{am}(ic),$$

wo dann c stets ein reelles positives Argument darstellt. Daraus erhält man mit Hinzuziehung des Werthes von k^2 aus (20.):

$$(23.)\quad \sigma = \tau\,\Delta\mathrm{am}(ic), \qquad \varrho = \tau\cos\mathrm{am}(ic).$$

Setzt man endlich

$$(24.)\quad z-\alpha = nu, \quad n = \frac{a}{\sqrt{\varrho^2-\tau^2}} = \frac{\tau i}{2}\cdot\frac{\sqrt{k'^4\sin^4\mathrm{am}(ic)+2(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic)-3}}{\sin\mathrm{am}(ic)},$$

so kann man nunmehr die Wurzeln ϱ, σ, τ durch die drei Gröfsen n, k, c darstellen; und wenn man dies in die Gleichungen (21.) einführt, so erhält man aus der ersten und dritten:

$$(25.)\quad \begin{cases} \dfrac{s+\varkappa}{n} = \dfrac{\{1-(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic)\}u+2k^2\sin^2\mathrm{am}(ic)\int_0^u \sin^2\mathrm{am}\,u\,du}{\sqrt{k'^4\sin^4\mathrm{am}(ic)+2(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic)-3}}, \\ \varphi-\beta = i\,\dfrac{\cos\mathrm{am}(ic)\,\Delta\mathrm{am}(ic)}{\sin\mathrm{am}(ic)}\int_0^u \dfrac{du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ic)\sin^2\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

Da nun noch, wenn K, E die ganzen Integrale der ersten und zweiten Gattung bezeichnen:

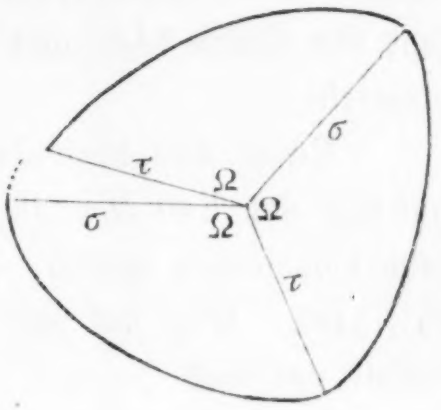
$$\int_0^u k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,du = \left(1-\frac{K}{E}\right)u - Z(u),$$

$$\int \frac{du}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ic)\sin^2\mathrm{am}\,u} = u + \frac{\sin\mathrm{am}(ic)}{\cos\mathrm{am}(ic)\,\Delta\mathrm{am}(ic)}\,\Pi(u, ic),$$

so erhält man schliefslich folgende Formeln, welche r, s und φ durch z und durch die Constanten n, k, c ausdrücken:

$$(26.)\quad \begin{cases} \dfrac{r^2}{n^2} = \dfrac{-4\sin^2\mathrm{am}(ic)}{k'^4\sin^4\mathrm{am}(ic)+2(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic)-3}\cdot\left(1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ic)\sin^2\mathrm{am}\dfrac{z-\alpha}{n}\right) \\ \varphi-\beta = i\,\dfrac{\cos\mathrm{am}(ic)\,\Delta\mathrm{am}(ic)}{\sin\mathrm{am}(ic)}\cdot\dfrac{z-\alpha}{n} + i\Pi\left(\dfrac{z-\alpha}{n}\cdot ic\right) \\ \dfrac{s+\varkappa}{n} = \dfrac{\{1-(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic)\}\dfrac{z-\alpha}{n}+2\sin^2\mathrm{am}(ic)\left(\left(1-\dfrac{K}{E}\right)\dfrac{z-\alpha}{n}-Z\left(\dfrac{z-\alpha}{n}\right)\right)}{\sqrt{k'^4\sin^4\mathrm{am}(ic)+2(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic)-3}}. \end{cases}$$

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN



Wenn man die z-Coordinaten von einer Höhe an rechnet, bei welcher der Radius r ein Maximum erreicht, also $\alpha = 0$ setzt, so wird dieser Radius selbst eine periodische Function von z, welche sich nicht ändert, wenn z in $-z$ übergeht, während zugleich s und φ mit z ihr Zeichen ändern, und aufser einem periodischen Theile noch Glieder enthalten, welche mit z proportional sind. Die Gestalt der Curve ist also die einer Spirale, welche sich der Z-Axe bald mehr, bald weniger nähert; die Projection auf die XY-Ebene zeigt congruente und abwechselnd symmetrische Theile, deren Begränzungsradien abwechselnd die Werthe σ und τ haben, und welche immer den nämlichen Centriwinkel umschliefsen. Um diesen zu finden, hat man nur den Zuwachs zu bestimmen, welchen φ erfährt, wenn $\frac{z-\alpha}{n}$ um K wächst. Hierzu ist es nicht unzweckmäfsig, sich zuerst einer Darstellungsweise zu bedienen, welche *Jacobi* bei der Rotation eines Körpers angewandt hat. Man hat

$$\Pi(u, ic) = uZ(ic) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-ic)}{\Theta(u+ic)};$$

sonach ist auch

$$\frac{\Theta(u-ic)}{\Theta(u+ic)} = e^{-2i\Phi} = \cos 2\Phi - i\sin 2\Phi,$$

wo der Kürze wegen

$$\Phi = \varphi - \beta - i\Big(\frac{\cos\mathrm{am}(ic)\,\Delta\mathrm{am}(ic)}{\sin\mathrm{am}(ic)} + Z(ic)\Big)\frac{z-\alpha}{n}$$

gesetzt ist; oder man hat

$$(27.)\quad \mathrm{tg}\,2\Big(\varphi - \beta - i\Big(\frac{\cos\mathrm{am}(ic)\,\Delta\mathrm{am}(ic)}{\sin\mathrm{am}(ic)} + Z(ic)\Big)\frac{z-\alpha}{n}\Big) = \frac{1}{i}\cdot\frac{\Theta\Big(\frac{z-\alpha}{n}+ic\Big) - \Theta\Big(\frac{z-\alpha}{n}-ic\Big)}{\Theta\Big(\frac{z-\alpha}{n}+ic\Big) + \Theta\Big(\frac{z-\alpha}{n}-ic\Big)}.$$

Da der Ausdruck rechts sich nicht verändert, wenn man das Argument um $2K$ wachsen läfst, so mufs inzwichen φ um den Winkel

$$(28.)\quad 2\Omega = i\Big\{\frac{\cos\mathrm{am}(ic)\,\Delta\mathrm{am}(ic)}{\sin\mathrm{am}(ic)} + Z(ic)\Big\}2K$$

gewachsen sein; und da dieser Winkel einer Curvenlänge angehört, nach

welcher der Radius vector genau die frühern Werthe wieder annimmt, so giebt die Hälfte (Ω) den Winkel an, welcher einem einzigen Curventheile entspricht.

Unter den besondern Fällen, welche von Interesse sein dürften, ist zunächst der Fall $k = 0$ hervorzuheben. In diesem Falle wird in (26.) r einer Constanten gleich, $\varphi - \beta$ aber mit $z - \alpha$ proportional, indem Π verschwindet. Man hat also eine gewöhnliche Schraubenlinie von allgemeinster Gestalt vor sich.

Wenn die Curve in diesem Falle ganz auf einer Cylinderoberfläche liegt, so ist sie dagegen in einer Ebene enthalten, sobald b oder a verschwindet. Für $b = 0$ ist φ constant, also die Curve in einer durch die Drehungsaxe gelegten Ebene enthalten. In Folge der Gleichungen (18^a.) ist dann nothwendig auch τ gleich Null; und wenn also nicht auch σ, ϱ verschwinden sollen, so müssen $\Delta\,\mathrm{am}(ic)$ und $\cos\mathrm{am}(ic)$ unendlich grofs werden, d. h.

$$c = K'.$$

Da zugleich $\sin\mathrm{am}(ic) = \infty$, so gehen die Gleichungen (26.) über in:

$$\frac{r^2}{n^2} = \frac{4k^2}{k'^4}\sin^2\mathrm{am}\frac{z-\alpha}{n},$$

$$\frac{s+x}{n} = \frac{(1+k^2)\frac{z-\alpha}{n} - 2\left(\left(1-\frac{K}{E}\right)\frac{z-\alpha}{n} - Z\left(\frac{z-\alpha}{n}\right)\right)}{k'^2}.$$

Ist dagegen $a = 0$, so ist die Curve ganz in der Ebene enthalten, welche gegen die Drehungsaxe senkrecht ist. In Folge der Gleichung (24.) hat man dann die Bedingung

$$n = 0 = k'^4\sin^4\mathrm{am}(ic) + 2(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic) - 3,$$

welche die Constante c durch den Modul k ausdrücken lehrt. Man erhält

$$\sin^2\mathrm{am}(ic) = \frac{-(1+k^2) - 2\sqrt{1+k^2+k^4}}{k'^4},$$

da das andere Zeichen zu verwerfen ist, weil $\sin^2\mathrm{am}(ic)$ wesentlich negativ ist. Es ist noch zu bemerken, dafs in den Gleichungen (26.) zugleich wieder u durch τ (aus (24.)) auszudrücken ist; das Argument $\frac{z-\alpha}{n}$ nimmt einen unbestimmten Werth an, und man hat schliefslich:

$$r^2 = \tau^2(1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(ic)\sin^2\mathrm{am}\,u),$$

$$\varphi - \beta = \frac{\cos\mathrm{am}(ic)\,\Delta\mathrm{am}(ic)}{i\sin\mathrm{am}(ic)}u + \frac{\Pi(u, ic)}{i},$$

$$s + x = \frac{\tau}{2i\sin\mathrm{am}(ic)}\left\{(1-(1+k^2)\sin^2\mathrm{am}(ic))\,u + 2\sin^2\mathrm{am}(ic)\left(\left(1-\frac{K}{E}\right)u - Zu\right)\right\}.$$

Eine Verbindung der letzten beiden Fälle giebt endlich, für $a = b = 0$, den einfachsten Fall, wo der Faden eine gerade Linie bildet, senkrecht gegen die Drehungsaxe.

§. 4.

Gleichungen für einen unfreien Faden.

Wenn der Faden nicht frei ist sondern genöthigt auf einer gewissen Oberfläche zu bleiben, so hat man die Aufgabe, $\int U ds$ zu einem Maximum zu machen, während x, y, z, s durch die Gleichung der Oberfläche, und durch die Gleichung

$$(29.) \qquad 1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$$

verbunden sind. Die Gleichung der Oberfläche mag dargestellt sein durch die drei Gleichungen

$$(30.) \qquad x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q), \quad z = \chi(p, q),$$

wo p, q willkürliche Veränderliche bezeichnen. Alsdann nimmt die Bedingungsgleichung (29.) die Gestalt an:

$$(31.) \qquad 1 = P\left(\frac{dp}{ds}\right)^2 + Q\left(\frac{dq}{ds}\right)^2 + 2R\frac{dp}{ds}\frac{dq}{ds}.$$

Setzt man daher jetzt, analog den Gleichungen (4.),

$$(32.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial p} = T\left(P\dfrac{dp}{ds} + R\dfrac{dq}{ds}\right), \\ \dfrac{\partial V}{\partial q} = T\left(R\dfrac{dp}{ds} + Q\dfrac{dq}{ds}\right), \\ -U = \dfrac{\partial V}{\partial s} + \dfrac{\partial V}{\partial p}\dfrac{dp}{ds} + \dfrac{\partial V}{\partial q}\dfrac{dq}{ds}, \end{cases}$$

so erhält man durch Elimination der Differentialien aus (31.), (32.):

$$(33.) \qquad T = -U - \frac{\partial V}{\partial s}; \quad \text{und}$$

$$(34.) \qquad \left(U + \frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 (QP - R^2) = Q\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 + P\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 - 2R\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial q}$$

als die partielle Differentialgleichung, deren vollständige Lösung V ist, und welche, wenn h, a die willkürlichen Constanten derselben bezeichnen, durch

$$(35.) \qquad z = \frac{\partial V}{\partial h}, \qquad \alpha = \frac{\partial V}{\partial a}$$

die Gleichung der gesuchten Curve und ihre Bogenlänge angiebt.

Schneiden sich insbesondere die Curvensysteme

$$p = \text{Const.}, \qquad q = \text{Const.}$$

auf der gegebenen Oberfläche unter rechten Winkeln, so ist $R = 0$, und die Gleichung (34.) nimmt die einfachere Gestalt an:

$$(36.) \qquad \left(U + \frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2.$$

Ist auch noch die Kräftefunction U von s unabhängig, so kann man setzen:

$$(37.) \qquad V = hs + f(p, q),$$

und die Gleichung (36.) geht über in

$$(38.) \qquad (U + h)^2 = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2.$$

§. 5.

Faden auf einer Rotationsoberfläche.

Man kann hiernach die beiden oben ausgeführten Probleme, und selbst eine Vereinigung beider, auf eine beliebige Rotationsoberfläche übertragen. Bezeichnen wir mit r den Abstand eines Punktes von der Rotationsaxe, und sei diese selbst die Z-Axe, φ aber bedeute den Winkel, welchen die Projection des Radius Vector auf einer gegen die Z senkrechten Ebene beschreibt. Dann hat man bekanntlich

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2,$$

oder, wenn $r = Fz$ die Gleichung der Rotationsoberfläche ist,

$$ds^2 = dz^2(1 + (F'z)^2) + (Fz)^2 d\varphi^2;$$

daher in den Gleichungen des vorigen Paragraphen:

$$P = 1 + (F'z)^2, \qquad Q = (Fz)^2, \qquad R = 0;$$

mithin nach (36.)

$$(39.) \qquad \left(U + \frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 = \frac{1}{1 + (F'z)^2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{(Fz)^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Ist nun U allein von r und z, oder, was dasselbe ist, allein von z abhängig, so darf man setzen:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = h, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = a, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \sqrt{\left[(U + h)^2 - \frac{a^2}{(Fz)^2}\right](1 + (F'z)^2)};$$

mithin

$$(40.) \qquad V = hs + a\varphi + \int dz \sqrt{\left[(U + h)^2 - \frac{a^2}{(Fz)^2}\right](1 + (F'z)^2)};$$

und sonach werden die Gleichungen der Fadencurve dargestellt durch:

$$(41.)\quad \begin{cases} x = s + \int \dfrac{(U+h)\,dz\sqrt{1+(F'z)^2}}{\sqrt{(U+h)^2 - \dfrac{a^2}{(Fz)^2}}}, \\ \alpha = \varphi - \int \dfrac{a\,dz\sqrt{1+(F'z)^2}}{(Fz)^2\sqrt{(U+h)^2 - \dfrac{a^2}{(Fz)^2}}}, \end{cases}$$

zu denen noch die Gleichung für die Spannung tritt:

$$(42.)\quad T = -U - h.$$

Betrachten wir insbesondere noch den im Eingange dieses Paragraphen erwähnten Fall. Ist die Z-Axe nach unten gerichtet, so ist die Kräftefunction der Schwerkraft Gz, wo G das Gewicht eines Fadentheils von der Länge 1 bedeutet; ferner die Kräftefunction der Centrifugalkraft (vgl. §. 3)

$$\frac{G\omega^2}{2g} r^2 = \frac{G\omega^2}{2g} (Fz)^2 = \mu (Fz)^2.$$

So also erhält man aus (41.), (42.) die Gleichungen:

$$(43.)\quad \begin{cases} x = s + \int \dfrac{(h+Gz+\mu(Fz)^2)\,dz\sqrt{1+(F'z)^2}}{\sqrt{(h+Gz+\mu(Fz)^2)^2 - \dfrac{a^2}{(Fz)^2}}}, \\ \alpha = \varphi - \int \dfrac{a\,dz\sqrt{1+(F'z)^2}}{(Fz)^2\sqrt{(h+Gz+\mu(Fz)^2)^2 - \dfrac{a^2}{(Fz)^2}}}, \\ T = -h - Gz - \mu(Fz)^2, \end{cases}$$

welche die Gleichgewichtsfigur eines der Centrifugalkraft unterworfenen schweren Fadens auf einer Rotationsoberfläche angeben.

Wenn man G und μ verschwinden läfst, so gehen sie in die Gleichungen der kürzesten Linie für eine solche Oberfläche über.

§. 6.

Kettenlinie auf der Kugel.

So erhält man aus den Gleichungen (43.) die Gestalt, welche ein schwerer Faden auf einer Kugeloberfläche annimmt. Läfst man μ verschwinden und setzt $Fz = \sqrt{l^2 - z^2}$, wo l den Radius der Kugel bezeichnet, so werden die obigen Gleichungen:

$$(44.)\quad \begin{cases} z = s + \int \frac{(h+Gz)\,l\,dz}{\sqrt{(h+Gz)^2(l^2-z^2)-a^2}}, \\ \alpha = \varphi - \int \frac{a l\,dz}{(l^2-z^2)\sqrt{(h+Gz)^2(l^2-z^2)-a^2}}, \\ T = -h-Gz. \end{cases}$$

Man sieht, dafs der Winkel φ sich durch Integrale der dritten Gattung darstellt, der Bogen hingegen durch die der zweiten Gattung.

Ohne auf die Reihenentwicklungen dieser Integrale einzugehen, will ich wenigstens der Wurzelgröfse eine andere Gestalt geben, welche ohne Weiteres auf die Normalform der elliptischen Integrale führt. Denn während man bei der Integration häufig auf die Discussion von Gleichungen der dritten und vierten Ordnung geführt wird, deren Coefficienten von den willkürlichen Constanten abhängig sind, so ist es doch sehr oft möglich dieselben durch andere zu ersetzen, welche sodann die Gleichung bereits aufgelöst zeigen, und es kommt bei der Zurückführung auf die Normalform oft hauptsächlich auf die Auffindung einer derartigen Ersetzung an; ein Beispiel dafür ist bereits in §. 3. gegeben worden.

Die Reihenentwicklung der Ausdrücke (44.) hängt von der Auflösung der biquadratischen Gleichung

$$Z = (h+Gz)^2(l^2-z^2) - a^2 = 0$$

ab, in welcher noch die willkürlichen Constanten a, h vorkommen. Ich setze zunächst $h = -Glm$, $a = Gbl^2$, $z = l\cos\vartheta$. Dann ist also der Ausdruck zu betrachten:

$$\frac{Z}{G^2l^4} = \Theta = (m-\cos\vartheta)^2\sin^2\vartheta - b^2.$$

Diesem Ausdrucke aber kann man zunächst die Gestalt geben:

$$\Theta = ((m-\cos\vartheta)\sin\vartheta - b)\,((m-\cos\vartheta)\sin\vartheta + b),$$

und indem man jeden dieser Factoren wiederum zerlegt, kann man setzen:

$$\Theta = [\sin(\vartheta+\varepsilon)+\gamma][\cos(\vartheta-\varepsilon)+\gamma'][\sin(\vartheta-\varepsilon)-\gamma][\cos(\vartheta+\varepsilon)+\gamma'].$$

Denn indem man die Gleichung betrachtet:

$$(\cos\vartheta - m)\sin\vartheta + b = [\sin(\vartheta+\varepsilon)+\gamma][\cos(\vartheta-\varepsilon)+\gamma'],$$

aus welcher die dem andern Factor entsprechende Gleichung durch Vertauschung von ϑ mit $-\vartheta$ hervorgeht, erhält man nur die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \gamma\cos 2\varepsilon &= m\sin\varepsilon, \\ \gamma'\cos 2\varepsilon &= -m\cos\varepsilon, \\ \sin\varepsilon\cos\varepsilon + \gamma\gamma' &= b. \end{aligned}$$

Man kann also an Stelle von m und b die Gröfsen ε und $\varrho = \frac{m}{\cos 2\varepsilon}$ als neue willkürliche Constanten betrachten, sobald nur gezeigt wird, dafs jedem Werthe von m, b wirklich immer reelle Werthe von ϱ, ε entsprechen. In Bezug auf ϱ ist dies augenscheinlich; ferner aber erhält man aus den obigen Gleichungen durch Elimination von $\gamma\gamma'$:

$$X = (x - 2b)(1 - x^2) - m^2 x = 0,$$

wo $x = \sin 2\varepsilon$ gesetzt ist. Diese Gleichung ist nichts Anderes als die Resolvente der biquadratischen Gleichung; man hat aber

$$\text{für } x = +1, \quad X = -m^2,$$
$$\text{für } x = -1, \quad X = +m^2,$$

so dafs nothwendig eine reelle Wurzel existirt, welche gleich einem sinus gesetzt werden darf.

Der Ausdruck Θ also hat nun, indem man den ersten Factor mit dem dritten, den zweiten mit dem vierten multiplicirt, die folgende Form:

$$\Theta = -\{\sin^2\vartheta\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon(\cos\vartheta + \varrho)^2\}\{\sin^2\vartheta\sin^2\varepsilon - \cos^2\varepsilon(\cos\vartheta - \varrho)^2\},$$

oder es wird, wenn statt $\cos\vartheta$ wieder z gesetzt wird,

$$\begin{aligned} Z &= -G^2(z^2 + 2l\varrho z\sin^2\varepsilon + l^2\varrho^2\sin^2\varepsilon - l^2\cos^2\varepsilon)(z^2 - 2l\varrho z\cos^2\varepsilon + l^2\varrho^2\cos^2\varepsilon - l^2\sin^2\varepsilon) \\ &= -G^2(z + l\varrho\sin^2\varepsilon + l\cos\varepsilon\sqrt{1-\varrho^2\sin^2\varepsilon})(z + l\varrho\sin^2\varepsilon - l\cos\varepsilon\sqrt{1-\varrho^2\sin^2\varepsilon}) \\ &\quad \cdot(z - l\varrho\cos^2\varepsilon + l\sin\varepsilon\sqrt{1-\varrho^2\cos^2\varepsilon})(z - l\varrho\cos^2\varepsilon - l\sin\varepsilon\sqrt{1-\varrho^2\cos^2\varepsilon}) \\ &= -G^2\zeta. \end{aligned}$$

Die Gleichung $Z = 0$ hat also entweder 4 reelle Wurzeln, und zwar wenn $\varrho^2 < \frac{1}{\sin^2\varepsilon}$ und auch $\varrho^2 < \frac{1}{\cos^2\varepsilon}$; oder zwei, wenn ϱ^2 zwischen diesen beiden Gröfsen liegt. Der dritte Fall ist ausgeschlossen, da bei der Existenz von vier imaginären Wurzeln $\sqrt{Z}$ fortwährend imaginär sein würde. Führt man endlich die neuen Constanten ϱ, ε in die Gleichungen (44.) ein, so erhält man:

$$(44^a.) \quad \begin{cases} z = s - \int \frac{(l\varrho\cos 2\varepsilon - z)\,l\,dz}{\sqrt{-\zeta}}, \\ \alpha = \varphi - \frac{l^3\sin 2\varepsilon}{2}(1-\varrho^2)\int \frac{dz}{(l^2-z^2)\sqrt{-\zeta}}, \\ T = G(l\varrho\cos 2\varepsilon - z), \end{cases}$$

Gleichungen, aus welchen man nunmehr leicht die Reihenentwicklungen ableiten kann.

§. 7.

Faden auf der Kugel, welcher der Centrifugalkraft unterworfen ist.

Ich will noch den Fall untersuchen, wo ein auf der Kugel befindlicher Faden nur dem Einflufs der Centrifugalkraft unterliegt, während die Drehungsaxe ein Durchmesser der Kugel sein soll. Läfst man in (43.) G verschwinden, und führt zugleich statt z den Radius r ein, so dafs $z^2 = l^2 - r^2$ gesetzt wird, so erhält man (vgl. §. 3)

$$(45.)\quad \begin{cases} z = s - \int \dfrac{l(h^2-r^2)r\,dr}{\sqrt{(h^2-r^2)^2r^2-a^2}\sqrt{l^2-r^2}}, \\ \alpha = \varphi - \int \dfrac{la\,r\,dr}{r^2\sqrt{(h^2-r^2)^2r^2-a^2}\sqrt{l^2-r^2}}, \\ T = \mu(h^2-r^2). \end{cases}$$

Dabei ist wiederum, wie früher, $-\mu h^2$ an die Stelle von h, $\mu^2 a^2$ an die Stelle von a^2, $\mu = \frac{G\omega^2}{2g}$ gesetzt, so dafs nun, damit die Spannung positiv sei, nur $r < h$ sein mufs, und zugleich μ aus den Gleichungen der Curve gänzlich verschwunden ist.

Die Behandlung der Integrale hängt von der cubischen Gleichung ab:

$$(46.)\quad R = (h^2-r^2)^2r^2 - a^2 = 0.$$

Der Ausdruck R aber nimmt für

$r^2 =$	∞	h	0	die Werthe an:
	$+\infty$	$-a^2$	$-a^2$.	

Da nun der Ausdruck nothwendig für gewisse Werthe von r, welche kleiner als h sind, positiv sein mufs, damit überhaupt eine reelle Curve erscheine, so sieht man, dafs die Gleichung $R = 0$ drei positive Wurzeln haben mufs, deren zwei kleiner, die dritte gröfser als h. Sei also

$$(47.)\quad R = r^2 - \varrho^2 . r^2 - \sigma^2 . r^2 - \tau^2,$$

so giebt die Vergleichung der Coefficienten von (46.), (47.):

$$(48.)\quad \begin{cases} 2h^2 = \varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2, \\ h^4 = \varrho^2\sigma^2 + \sigma^2\tau^2 + \tau^2\varrho^2, \\ a^2 = \varrho^2\sigma^2\tau^2. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dafs ϱ, σ, τ innerhalb der oben gedachten Grenzen ganz beliebige Werthe annehmen, welche der einzigen Bedingung genügen:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varrho^2+\sigma^2+\tau^2)^2 - 4(\varrho^2\sigma^2+\sigma^2\tau^2+\tau^2\varrho^2) \\ &= (\varrho+\sigma+\tau)(\varrho+\sigma-\tau)(\varrho-\sigma+\tau)(\varrho-\sigma-\tau). \end{aligned}$$

Ist also, wie man annehmen darf,

$$\varrho > \sigma > \tau,$$

so folgt

$$\varrho = \sigma + \tau;$$

und der Ausdruck $\boldsymbol{R}$ ist also durch folgenden ersetzbar:

$$(49.) \qquad \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}^2 - (\sigma+\tau)^2)(\boldsymbol{r}^2 - \sigma^2)(\boldsymbol{r}^2 - \tau^2).$$

Man kann also nun an die Stelle der Gleichungen (45.) die folgenden setzen:

$$(50.) \qquad \begin{cases} x = s - \int \dfrac{l(\sigma^2+\tau^2+\sigma\tau-r^2)\,r\,dr}{\sqrt{(l^2-r^2)(r^2-\sigma^2)(r^2-\tau^2)(r^2-(\sigma+\tau)^2)}}, \\ \alpha = \varphi - \int \dfrac{l\sigma\tau(\sigma+\tau)\,r\,dr}{r^2\sqrt{(l^2-r^2)(r^2-\sigma^2)(r^2-\tau^2)(r^2-(\sigma+\tau)^2)}}, \\ \boldsymbol{T} = \mu(\sigma^2+\tau^2+\sigma\tau-\boldsymbol{r}^2), \end{cases}$$

wo σ, τ willkürliche Constanten bezeichnen, und $\sigma > \tau$. Eine derselben mufs auch kleiner sein als l, und erfüllt nur τ diese Bedingung, so liegt r zwischen τ und l; ist dagegen auch σ kleiner als l, so liegt r zwischen σ und τ. Es ist leicht von den obigen Ausdrücken zu den Reihenentwicklungen überzugehen.

§. 8.

Gleichgewicht dünner elastischer Fäden.

Auch das Problem eines elastischen Fadens ist einer ähnlichen Behandlung fähig, wenn derselbe äufsern Kräften unterworfen ist, welche eine Kräftefunction zulassen, und wenn zugleich sein Querschnitt so gering ist, dafs man den Widerstand gegen die Biegung vernachlässigen darf.

Es sei $d\sigma$ die ursprüngliche Länge eines Elements, ds dieselbe nach der Ausdehnung. Die Spannung des Fadens in diesem Elemente ist dann

$$(51.) \qquad \boldsymbol{T} = m^2 \frac{ds - d\sigma}{d\sigma} = m^2 \lambda,$$

wo m eine Constante, λ die Ausdehnung der Längeneinheit bezeichnet. Ist also zugleich $\boldsymbol{U}d\sigma$ die Kräftefunction, so hat man nach (1.) die Gleichungen:

$$(52.) \qquad \begin{cases} m^2 \dfrac{d}{d\sigma}\left(\lambda \dfrac{dx}{ds}\right) + \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ m^2 \dfrac{d}{d\sigma}\left(\lambda \dfrac{dy}{ds}\right) + \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ m^2 \dfrac{d}{d\sigma}\left(\lambda \dfrac{dz}{ds}\right) + \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Da aber

$$(53.)\qquad \lambda = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2}-1, \qquad \frac{ds}{d\sigma}=1+\lambda,$$

so kann man an Stelle der Gleichungen (52.) auch die folgenden setzen:

$$(54.)\qquad \begin{cases} \frac{m^2}{2}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\lambda^2}{\partial\frac{dx}{d\sigma}}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}=0, \\ \frac{m^2}{2}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\lambda^2}{\partial\frac{dy}{d\sigma}}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0, \\ \frac{m^2}{2}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\lambda^2}{\partial\frac{dz}{d\sigma}}\right)+\frac{\partial U}{\partial z}=0, \end{cases}$$

welche auch aus der Aufgabe abgeleitet werden können, ***das Integral***

$$\int\left(\frac{m^2\lambda^2}{2}-U\right)d\sigma$$

zu einem Minimum zu machen.

Setzt man also, um diese Aufgabe auf eine partielle Differentialgleichung zurückzuführen:

$$(55.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x}=m^2\lambda\frac{dx}{ds}=\frac{m^2}{2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial\frac{dx}{d\sigma}}, \\ \frac{\partial V}{\partial y}=m^2\lambda\frac{dy}{ds}=\frac{m^2}{2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial\frac{dy}{d\sigma}}, \\ \frac{\partial V}{\partial z}=m^2\lambda\frac{dz}{ds}=\frac{m^2}{2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial\frac{dz}{d\sigma}}, \end{cases}$$

$$(56.)\qquad \frac{\partial V}{\partial\sigma}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{d\sigma}=\frac{m^2\lambda^2}{2}-U$$

und berücksichtigt zugleich den Ausdruck (53.) für λ, so erhält man

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=m^4\lambda^2,$$

aber auch

$$\frac{\partial V}{\partial\sigma}+U=\frac{m^2\lambda^2}{2}-m^2\lambda\frac{ds}{d\sigma}=-m^2\left(\frac{\lambda^2}{2}+\lambda\right);$$

und durch Elimination von λ aus beiden Gleichungen:

$$(57.)\qquad \left\{\frac{\partial V}{\partial\sigma}+U+\frac{1}{2m^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

oder auch:

$$(58.)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = m^4\left\{\sqrt{1-2\frac{U+\frac{\partial V}{\partial \sigma}}{m^2}}-1\right\}^2.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung, deren vollständige Lösung gesucht werden mufs. Man kann sich derselben immer in der irrationalen Form (58.) bedienen, sobald U von σ unabhängig ist, wo dann $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ einer Constanten gleich gesetzt werden darf; und sie hat dann genau den Character der Gleichung (6.), *und gestattet daher die vollständige Auflösung sämmtlicher Probleme, welche oben für einen unelastischen Faden angedeutet sind.*

Es mag noch bemerkt sein, dafs die Gleichung (58.) in die Gleichung (6.) selbst übergeht, sobald man m unendlich grofs setzt, welches dem unelastischen Faden entspricht. Es dürfen also wirklich die früheren Probleme als specielle Fälle des vorliegenden angesehen werden.

§. 9.

Gleichgewicht eines dünnen elastischen Fadens unter dem Einflufs der Schwere.

Sei die Schwere die einzige wirkende Kraft, die Z-Axe nach oben gerichtet, G das Gewicht der Längeneinheit. Man hat dann $U=-Gz$; und setzt man daher in (58.)

$$\frac{\partial V}{\partial x}=m^2 a,\qquad \frac{\partial V}{\partial \sigma}=Gh,$$

so wird

$$\frac{\partial V}{\partial z}=m^2\sqrt{\left\{\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1\right\}^2-a^2},$$

also

$$V=m^2 ax+Gh\sigma+m^2\int dz\sqrt{\left\{\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1\right\}^2-a^2}.$$

Die Gleichung der Fadencurve ist nunmehr

$$(59.)\qquad \alpha=\frac{\partial V}{\partial a}=x-a\int\frac{dz}{\sqrt{\left\{\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1\right\}^2-a^2}}.$$

Die ursprüngliche Bogenlänge aber drückt sich aus, indem man nach h differentiirt und bemerkt, dafs unter dem Integralzeichen statt dessen nach $-z$ differentiirt werden kann, durch:

$$(60.)\qquad z=\sigma-m^2\sqrt{\left\{\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1\right\}^2-a^2}.$$

Auch das Integral (59.) ist leicht auszuführen. Setzt man

$$\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1 = u,$$

so ist

$$dz = \frac{m^2}{G}(1+u)\,du,$$

mithin geht (59.) über in:

$$x-\alpha = \frac{am^2}{G}\int\frac{(1+u)\,du}{\sqrt{u^2-a^2}},$$

$$= \frac{am^2}{G}(\log(u+\sqrt{u^2-a^2})+\sqrt{u^2-a^2}).$$

Führt man nun wieder für u seinen Werth in z ein, so erhält man:

$$(61.)\quad x-\alpha = \frac{am^2}{G}\left\{\begin{array}{l}\log\left(\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1+\sqrt{\left(\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1\right)^2-a^2}\right)\\ +\sqrt{\left(\sqrt{1+2G\frac{z-h}{m^2}}-1\right)^2-a^2}\end{array}\right\},$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist. Setzt man in derselben m unendlich grofs, und $\frac{a}{m^2}$ an die Stelle von a, so geht dieselbe in die Gleichung der gewöhnlichen Kettenlinie über.

Carlsruhe, den 26sten Mai 1859.

Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante.

(Aus dem Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

(Von *C. W. Borchardt.*)

Wenn man die Resultante der Elimination zwischen zwei algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten aufsucht, so pflegt man die ganzen Functionen, welche die linken Seiten der Gleichungen bilden, als durch die Werthe ihrer Coefficienten gegeben vorauszusetzen. Diese Art der Bestimmung ganzer Functionen ist als diejenige Specialisirung der Interpolation anzusehen, die dem Zusammenfallen sämmtlicher Argumente, für welche die Functionswerthe gegeben sind, entspricht. Aber man weifs, dafs jedes Zusammenfallen mehrerer Argumente in der Theorie der Interpolation, anstatt die Resultate zu vereinfachen, sie verwickelter macht und die leicht übersichtliche Gesetzmäfsigkeit der Ausdrücke stört.

Es war daher ein glücklicher Gedanke, der von Herrn ***Rosenhain*** herrührt, die Resultante der Elimination zwischen zwei Gleichungen $\varphi z = 0$ $\psi z = 0$ nicht durch die Coefficienten von φz und ψz sondern durch die Werthe darzustellen, welche diese Functionen für gegebene Argumente annehmen. Das von demselben im 30sten Bande des mathematischen Journals veröffentlichte Ergebnifs ist von um so gröfserer Bedeutung, als sich die nämliche Art der Darstellung auf eine ganze Reihe anderer Ausdrücke ausdehnen läfst und namentlich auf diejenigen, welche sich bei der Entwicklung des Quotienten $\frac{\varphi z}{\psi z}$ in einen Kettenbruch ergeben.

Aber die ***Rosenhain***sche Darstellung erfordert, dafs man die Werthe der Functionen φz, ψz für eine Reihe von Argumenten kenne, deren Anzahl der Summe der Ordnungen von φz und ψz gleich ist, also in dem Fall, in welchem beide Functionen von der n^{ten} Ordnung sind, für $2n$ verschiedene Argumente. Diese $2n$ Functionswerthe sind also nicht von einander unabhängig, sondern $n-1$ derselben durch die übrigen $n+1$ bestimmt. Die ***Rosenhain***sche Formel kann daher nicht dazu gebraucht werden, die Resultante der Elimination darzustellen, wenn jede der Functionen φz, ψz in-

terpolatorisch gegeben ist. Auf diesen Fall bezieht sich die gegenwärtige Untersuchung, sie beschäftigt sich mit der Lösung folgender Aufgabe:

> Die beiden Functionen φz und ψz, jede n^{ten} Grades, sind durch die Werthe gegeben, die sie für $z = \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ annehmen. Durch diese zweimal $n+1$ Functionswerthe soll die Resultante der Elimination zwischen den Gleichungen $\varphi z = 0$, $\psi z = 0$ ausgedrückt werden.

In dem hier vorliegenden Falle giebt die sogenannte abgekürzte *Bezout*sche Eliminationsmethode die Resultante durch die Coefficienten ausgedrückt. Nach der übersichtlichen von Herrn *Cayley* gegebenen Darstellungsweise des anzuwendenden Verfahrens hat man den Quotienten

$$F(x, y) = \frac{\varphi x \psi y - \varphi y \psi x}{y - x}$$

zu bilden und nach Potenzen von x und y zu ordnen. Ist

$$a_{ik} x^i y^k$$

das allgemeine Glied desselben, so ist die Determinante D der Coefficienten a_{ik} (wo sowohl i als k die Zahlen 0 bis $n-1$ durchlaufen) die Resultante der Elimination zwischen den Gleichungen $\varphi z = 0$, $\psi z = 0$.

Vermittelst bekannter Determinantensätze läfst sich die Determinante D so transformiren, dafs sie, anstatt durch die Coefficienten a_{ik}, durch besondere Werthe der Function $F(x, y)$ dargestellt wird. Bezeichnet man mit $F(x_i, y_k)$ diese besonderen Werthe (wo sowohl i als k die Zahlen 1 bis n durchlaufen), mit D' die Determinante derselben und mit $\triangle(x_1, x_2, \ldots x_n)$ das Product aller Differenzen der Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ (jede Differenz so genommen, dafs ein Argument mit kleinerem Index von einem mit gröfserem abgezogen wird), so hat man *)

$$(1.) \qquad D = \frac{D'}{\triangle(x_1, x_2, \ldots x_n)\triangle(y_1, y_2, \ldots y_n)}.$$

---

*) Es läfst sich beiläufig bemerken, dafs in der Transformation (1.) zugleich eine unmittelbare Verification der abgekürzten *Bezout*schen Eliminationsmethode liegt. Diese Verification ergiebt sich, indem man die beiden Reihen von Argumenten $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_n$ mit den Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ der Gleichung $\varphi x = 0$ zusammenfallen läfst. Unter dieser Annahme wird

$$\varphi x = B(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n),$$

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = C + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\psi\beta_i}{\varphi'\beta_i} \cdot \frac{1}{x-\beta_i},$$

$$F(x, y) = -\varphi x \varphi y \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\psi\beta_i}{\varphi'\beta_i} \cdot \frac{1}{x-\beta_i} \cdot \frac{1}{y-\beta_i},$$

In dem Fall der vorliegenden Aufgabe sind die Werthe von φx und ψx für $x = \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ gegeben. Unter Einführung der Function

$$fx = (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$$

werden also die interpolatorischen Darstellungen von φx und ψx

$$\varphi x = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\varphi\alpha_i}{f'\alpha_i}\,\frac{fx}{x-\alpha_i}, \qquad \psi x = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi\alpha_i}{f'\alpha_i}\,\frac{fx}{x-\alpha_i}$$

und daher

$$F(x,y) = \frac{\varphi x\,\psi y - \varphi y\,\psi x}{y-x}$$

$$= \Sigma \frac{\alpha_i-\alpha_k}{f'\alpha_i f'\alpha_k}(\varphi\alpha_i\psi\alpha_k - \varphi\alpha_k\psi\alpha_i)\,\frac{fx}{x-\alpha_i.x-\alpha_k}\cdot\frac{fy}{y-\alpha_i.y-\alpha_k},$$

wo über alle Combinationen zweier verschiedenen Gröfsen α_i, α_k zu summiren ist.

Hieraus ergiebt sich für $x=\alpha_i$, $y=\alpha_k$ oder $x=\alpha_k$, $y=\alpha_i$, wenn i von k verschieden ist:

$$F(\alpha_i,\alpha_k) = F(\alpha_k,\alpha_i) = \frac{\varphi\alpha_i\psi\alpha_k - \varphi\alpha_k\psi\alpha_i}{\alpha_k-\alpha_i},$$

dagegen für $x=y=\alpha_i$:

$$F(\alpha_i,\alpha_i) = -\sum_k \frac{f'\alpha_i}{f'\alpha_k}\cdot\frac{\varphi\alpha_i\psi\alpha_k - \varphi\alpha_k\psi\alpha_i}{\alpha_k-\alpha_i},$$

wo sich die Summe nach k über alle von i verschiedenen Werthe erstreckt. Es ist daher

$$\frac{F(\alpha_i,\alpha_i)}{f'\alpha_i.f'\alpha_i} = -\sum_k \frac{F(\alpha_i,\alpha_k)}{f'\alpha_i.f'\alpha_k}.$$

Führt man für je zwei von einander verschiedene Zahlen i, k aus der Reihe 0 bis n die Bezeichnung ein:

$$(2.) \qquad \frac{\varphi\alpha_i\psi\alpha_k - \varphi\alpha_k\psi\alpha_i}{f'\alpha_i f'\alpha_k(\alpha_k-\alpha_i)} = (ik)$$

und setzt ferner

$$(3.) \qquad (ii) = -\sum_k (ik),$$

---

also

$$F(\beta_i,\beta_i) = -\psi\beta_i\,\varphi'\beta_i,$$
$$F(\beta_i,\beta_k) = 0,$$

wenn i von k verschieden ist. Die allgemeine Transformation (1.) giebt daher, so angewendet, für D, abgesehen vom Zeichen, den Ausdruck:

$$B^n\psi\beta_1\,\psi\beta_2\ldots\psi\beta_n,$$

was die bekannte *Eulersche* Form der Eliminationsresultante ist.

wo nach k wiederum über alle von i verschiedenen Zahlen aus der Reihe 0 bis n zu summiren ist, so wird demnach schliefslich:

$$F(\alpha_i, \alpha_k) = f'\alpha_i f'\alpha_k . (ik),$$
$$F(\alpha_i, \alpha_i) = f'\alpha_i f'\alpha_i . (ii).$$

Man bilde nun das System der $(n+1)^2$ Gröfsen (ik), nämlich

$$(4.) \quad \begin{cases} (00)\,(01)\,(02)\ldots(0n) \\ (10)\,(11)\,(12)\ldots(1n) \\ (20)\,(21)\,(22)\ldots(2n) \\ \vdots \\ (n0)\,(n1)\,(n2)\ldots(nn), \end{cases}$$

ein System, welches erstens ein symmetrisches ist, so dafs $(ik) = (ki)$, und welches ferner nach Gleichung (3.) die Eigenschaft besitzt, dafs je $n+1$ in einer Horizontal- oder Verticalreihe stehende Elemente die Summe Null haben, so dafs:

$$(i0)+(i1)+\cdots+(ii)+\cdots+(in) = 0.$$

Hieraus folgt zunächst, dafs die Determinante $n+1^{\text{ster}}$ Ordnung R aus dem ganzen mit (4.) bezeichneten System verschwindet. Es folgt überdies, dafs die sämmtlichen Unterdeterminanten erster Ordnung von R, die Gröfsen $\frac{\partial R}{\partial (ik)}$, einander gleich sind. Man betrachte z. B. $\frac{\partial R}{\partial (00)}$, d. h. die Determinante desjenigen Systems, welches aus (4.) hervorgeht, wenn die erste Horizontal- und die erste Verticalreihe fortgelassen wird, und das mit (5.) bezeichnet werden möge. In dem Systeme (5.) ist irgend ein Element der ersten Verticalreihe $(i1)$, wofür man die Summe

$$-\{(i0)+(i2)+(i3)+\cdots+(in)\}$$

setzen kann. Wegen der übrigen Verticalreihen ist es erlaubt, in dieser Summe die Glieder $(i2)$, $(i3)\ldots(in)$ fortzulassen, ohne dafs sich der Werth der Determinante ändert, $\frac{\partial R}{\partial (00)}$ bleibt also sich selbst gleich, wenn man für jedes Element $(i1)$ seiner ersten Verticalreihe $-(i0)$ setzt, d. h. es ist

$$\frac{\partial R}{\partial (00)} = \frac{\partial R}{\partial (01)}.$$

Aehnliches gilt, wenn man für die Indices 0, 1 zwei beliebige Indices setzt, und es sind demnach sämmtliche Unterdeterminanten

$$\frac{\partial R}{\partial (ik)}$$

einander gleich. Diesen gemeinschaftlichen Werth der Unterdeterminanten,

welcher mit R' bezeichnet werde, braucht man nur mit dem Quadrat des Products aus allen Differenzen der Argumente $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ zu multipliciren, um die Eliminationsresultante D zu erhalten.

In der That, man setze in der Transformationsformel (1.)

$$x_1 = y_1 = \alpha_1, \quad x_2 = y_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad x_n = y_n = \alpha_n,$$

so ergiebt sich

$$D = \frac{\Sigma \pm F(\alpha_1, \alpha_1) F(\alpha_2, \alpha_2) \ldots F(\alpha_n, \alpha_n)}{\{\triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)\}^2}$$

$$= \frac{\{f'\alpha_1 f'\alpha_2 \ldots f'\alpha_n\}^2}{\{\triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)\}^2} \Sigma \pm (11)(22)\ldots(nn)$$

oder, indem man mit $(f'\alpha_0)^2 = (\alpha_1 - \alpha_0)^2 (\alpha_2 - \alpha_0)^2 \ldots (\alpha_n - \alpha_0)^2$ oben und unten multiplicirt,

$$D = \{\triangle(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)\}^2 \frac{\partial R}{\partial (00)}$$

$$= \{\triangle(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)\}^2 R'.$$

Setzt man der Kürze halber

$$(6.) \qquad \varpi = (\alpha_1 - \alpha_0)^2 (\alpha_2 - \alpha_0)^2 \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})^2,$$

so ist also

$$D = \varpi R'.$$

Den gemeinschaftlichen Werth R' der Unterdeterminanten von R, mit $(-1)^n$ multiplicirt und in die $\frac{n.n+1}{2}$ Elemente (ik) ausgedrückt, wo i, k zwei Zahlen aus der Reihe 0 bis n sind und $i < k$, bezeichne man mit $(0, 1, \ldots n) = S$, so dafs

$$(7.) \qquad (-1)^n R' = \frac{(-1)^n D}{\varpi} = (0, 1, \ldots n) = S$$

ist.

Um die algebraische Zusammensetzung dieses Ausdrucks S kennen zu lernen, mufs man auf das früher betrachtete System (5.) zurückgehen, welches aus (4.) durch Fortlassung der ersten Horizontal- und der ersten Verticalreihe hervorging. Nimmt man in (5.) jedes Element mit entgegengesetztem Zeichen und drückt die Elemente $-(ii)$ der Diagonale durch die übrigen aus, so geht (5.) in das folgende System (8.) über:

$$(8.) \quad \begin{cases} (10)+(12)+\cdots+(1n), & -(12) & -(1n) \\ -(21), & (20)+(21)+(23)+\cdots+(2n), & -(2n) \\ -(31) & -(32) & -(3n) \\ \vdots & & \\ -(n1) & -(n2), & (n0)+\cdots+(n\ n-1), \end{cases}$$

dessen Determinante

$$S = \frac{(-1)^n D}{\varpi}$$

ist.

Die den Index 0 enthaltenden Elemente kommen in (8.) jedes nur einmal vor und zwar in den Diagonalgliedern. So findet sich (01) nur im ersten Gliede der ersten Horizontalreihe. Geht man von (8.) wiederum zu einem neuen System (9.) durch Fortlassung der ersten Horizontal- und der ersten Verticalreihe über und bezeichnet mit S' die Determinante von (9.), so ist daher $(01).S'$ der Complex der Terme von S, die (01) enthalten. In (9) kommen die Indices 0 und 1 nur in den Diagonalgliedern vor, folglich nur in den Verbindungen

$$(20)+(21),\quad (30)+(31),\quad \ldots\quad (n0)+(n1).$$

Es ist daher zur Bestimmung der Determinante S' von (9) hinreichend, ihren Werth in dem besonderen Fall zu kennen, wo die Elemente $(20), (30), \ldots (n0)$ sämmtlich verschwinden, da sich aus demselben der allgemeine Werth von S' ergiebt, wenn man an die Stelle von $(21), (31), \ldots (n1)$ die Summen $(20)+(21), (30)+(31), \ldots (n0)+(n1)$, oder, kürzer symbolisch ausgedrückt, an die Stelle des Index 1 das Aggregat der beiden Indices $0+1$ setzt. In jenem besonderen Fall aber, wo $(20), (30), \ldots (n0)$ verschwinden, geht (9.) in ein System über, welches, um eine Ordnung niedriger als das System (8.), sich ebenso auf die Indices $1, 2, \ldots n$ bezieht, wie jenes auf die Indices $0, 1, \ldots n$, dessen Determinante daher $= (1, 2, \ldots n)$ ist. Folglich wird

$$S' = (\overline{0+1}, 2, 3, \ldots n),$$

unter welcher symbolischen Bezeichnung der Ausdruck zu verstehen ist, in den $(1, 2, \ldots n)$ übergeht, wenn an die Stelle von jedem Elemente $(1k)$ die Summe $(0k)+(1k)$ tritt *). Man hat also den für die hier betrachteten Ausdrücke fundamentalen Satz, *daſs in*

$$S = (0, 1, 2 \ldots n)$$

der Coefficient von (01) *der Ausdruck*

$$(\overline{0+1}, 2 \ldots n)$$

ist.

---

*) Hier ist k eine der Zahlen $2, 3 \ldots n$.

Durch wiederholte Anwendung hiervon findet man weiter, dafs in

$$S = (0, 1, \ldots n)$$

das Product $(01)(02)\ldots(0i)$, wo $i<n$ ist, zum Coefficienten den Ausdruck

$$(\overline{0+1+\cdots+i}, i+1, \ldots n)$$

hat, welche symbolische Bezeichnung in analogem Sinn, wie die frühere, zu verstehen ist. Für $i = n$ erhält man als Coefficienten des Products $(01)(02)\ldots(0n)$ die Einheit.

Aus vorstehendem Ergebnifs läfst sich eine Entwicklung von S nach den Producten der Elemente (01), (02), $\ldots$ $(0n)$ bilden. Dieselbe besteht, da Glieder, die von allen diesen n Elementen unabhängig sind, nicht vorkommen *), aus einer ersten Klasse von Ausdrücken, deren jeder nur eins dieser Elemente als Factor enthält, aus einer zweiten Klasse von Ausdrücken, deren jeder ein Product von zweien dieser Elemente als Factor enthält u. s. w. Schreibt man von jeder Klasse nur *einen* repräsentirenden Ausdruck nieder, also von der k^{ten} Klasse den folgenden:

$$(01)(02)\ldots(0k)\,C_k,$$

wo C_k von den Elementen (01), (02), $\ldots$ $(0n)$ unabhängig ist, so ergiebt sich als Werth von C_k der von dem Index 0 freie Theil des Ausdrucks $(\overline{0+1+\cdots+k}, k+1, \ldots n)$, d. h.

$$C_k = (\overline{1+2+\cdots+k}, k+1, \ldots n),$$

wenn $k<n$, und

$$C_n = 1,$$

so dafs man für S die Entwicklung hat:

$$\begin{aligned}(0, 1, \ldots n) = {} & \Sigma(01)(1, 2, \ldots n)\\ & + \Sigma(01)(02)(\overline{1+2}, 3, \ldots n)\\ & + \cdots\\ & + \Sigma(01)(02)\ldots(0k)(\overline{1+2+\cdots+k}, k+1, \ldots n)\\ & + \cdots\\ & + (01)(02)\ldots(0n).\end{aligned}$$

Diese Entwicklung ist ausreichend, um die Ausdrücke S für alle Ordnungen zu bilden. Man hat nur nöthig, von der niedrigsten Ordnung an-

*) Denn wenn man die Elemente (01), (02), $\ldots$ $(0n)$ alle zugleich verschwinden läfst, so geht (8.) in ein dem (4.) ähnliches System über, dessen Determinante verschwindet.

fangend stufenweise zu den höheren aufzusteigen und erhält

$$\begin{aligned}(0,1) &= (01),\\ (0,1,2) &= \Sigma(01)(12)+(01)(02)\\ &= (01)(02)+(10)(12)+(20)(21)\end{aligned}$$

u. s. w.

Die der bisherigen Untersuchung zu Grunde liegenden und jetzt zusammenzustellenden Eigenschaften der Ausdrücke S, welche zur Herleitung der obigen Entwicklung nothwendig waren und für die vollständige Bestimmung jener Ausdrücke hinreichen, sind die folgenden:

1. $S=(0,1,\ldots n)$ ist ein Ausdruck n^{ter} Ordnung der $\frac{n.n+1}{2}$ Elemente (01), (02), $\ldots$ $(0n)$, (12) etc., welcher bei Vertauschung von je zwei Indices ungeändert bleibt.
2. Der Coefficient des Products $(01)(02)\ldots(0n)$ in S ist $=1$.
3. Es kommt in S kein Glied vor, das von einem der Indices z. B. von 0 frei wäre.
4. Der Coefficient von (01) in S ist der Ausdruck

$$(\overline{0+1},2,\ldots n).$$

Hierauf sich stützend ist man im Stande nachzuweisen, dafs die Ausdrücke S einem einfachen Bildungsgesetz folgen. Um dasselbe kurz in Worte fassen zu können, ist es zweckmäfsig, vorher eine Unterscheidung in Beziehung auf Producte aus einer beliebigen Anzahl der $\frac{n.n+1}{2}$ Elemente (01), (02), $\ldots$ $(0n)$, (12) etc. einzuführen. Wenn ein solches Product eine Reihe von Elementen enthält, welche dergestalt im Kreise angeordnet werden können, dafs jedes Element einen Index mit dem vorhergehenden Element und den anderen mit dem folgenden gemein hat, d. h. eine Elementenreihe von der Art der folgenden:

$$(ik)(ki)$$
$$(ik)(kl)(li)$$
$$(ik)(kl)(lm)(mi)$$
u. s. w.,

so soll das Product ein *cyclisches* genannt werden, wonicht, ein *nicht-cyclisches*. Dies vorausgesetzt, so wird die Bildungsweise des Ausdrucks S in folgendem Satz ausgesprochen:

Der Ausdruck

$$(7.) \qquad S = \frac{(-1)^n D}{\varpi},$$

wo D die Eliminationsresultante der beiden Gleichungen n^{ten} Grades $\varphi z = 0$, $\psi z = 0$, und ϖ das Quadrat des Products aus allen Differenzen der Argumente $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, ***läfst sich durch die*** $\frac{n.n+1}{2}$ ***Elemente***

$$(2.) \qquad (ik) = \frac{\varphi\alpha_i \psi\alpha_k - \varphi\alpha_k \psi\alpha_i}{f'\alpha_i f'\alpha_k (\alpha_k - \alpha_i)}$$

darstellen, wo i, k zwei von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe 0, 1, ... n, und $fz = (z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)$; ***so dargestellt ist*** S ***gleich der Summe aller nicht-cyclischen Producte, die aus je*** n ***jener*** $\frac{n.n+1}{2}$ ***Elemente*** (ik) ***gebildet werden können.***

Zum Beweise des Satzes bezeichne man die Summe dieser ***nicht-cyclischen*** Producte mit

$$A(0, 1, 2, \ldots n).$$

Dafs dieselbe die unter 1. und 2. aufgeführten Eigenschaften besitzt, ist einleuchtend.

Um an der Summe A die Eigenschaft 3. nachzuweisen, ist zu zeigen, dafs, wenn man den Index 0 ausschliefst, also n Indices und $\frac{n.n-1}{2}$ Elemente übrig behält, aus diesen ein nicht-cyclisches Product von n Elementen zu bilden unmöglich ist. Diese Unmöglichkeit wird für n Indices 1, 2, ... n bewiesen, indem dieselbe, wenn $m < n$ ist, für m Indices und Producte aus m Elementen vorausgesetzt wird.

Angenommen, für n Indices gebe es ein nicht-cyclisches Product von n Elementen und dasselbe enthalte den Factor (12), so mufs es jeden der Indices 1, 2 noch einmal enthalten, denn käme der Index 2 nicht noch einmal vor, so wäre das übrig bleibende Product ein nicht-cyclisches $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung der $n-1$ Indices 1, 3, 4, ... n gegen die Voraussetzung. In dem betrachteten Gliede kommt also der Index 2 noch einmal vor, und zwar nicht in der Combination (21) (denn sonst wäre der Cyclus 1 2 geschlossen), also in einer neuen Combination, etwa durch das Element (23). Aus denselben Gründen kommt jetzt der Index 3 noch einmal vor und zwar nicht in der Combination (32) oder (31), (denn sonst wäre der Cyclus 2 3 oder der Cyclus 1 2 3 geschlossen), also in einer neuen Combination, etwa durch das Element (34). Indem man auf dieselbe Weise fortfährt, erhält man

ein Product von $n-1$ Factoren, welches abgesehen von der Ordnung der Indices die Form

$$(12)(23)\ldots(n-1n)$$

hat, und wie man jetzt auch den n^{ten} hinzuzufügenden Factor wählen möge, so wird durch denselben immer ein Cyclus geschlossen.

Für $n=2$, wo es nur das eine Element (12) giebt, ist die Unmöglichkeit eines nicht-cyclischen Productes zweier Elemente augenscheinlich, folglich gilt dieselbe nach obigem Beweise allgemein, *d. h. wie man auch aus den* $\frac{n.n-1}{2}$ *Elementen* (12), (13) ... (1n), (23) *etc. ein Product von n Elementen bilden möge, so ist dasselbe immer ein cyclisches.* Hiermit ist die Eigenschaft 3. an der Summe A nachgewiesen.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, dafs die Summe A auch die Eigenschaft 4. besitzt. Der in (01) multiplicirte Theil von

$$A(0, 1, \ldots n)$$

sei

$$(01)B(0, 1, \ldots n),$$

wo kein Glied in B das Element (01) noch einmal enthalten darf, weil sonst der Cyclus 01 geschlossen wäre.

Jedes Glied von B wird eine Anzahl von Elementen (0i) und eine Anzahl von Elementen (1k) enthalten. Dafs beide Anzahlen gleichzeitig verschwinden, ist nach dem vorhin Bewiesenen unmöglich. Zwei Elemente (0i) und (1i) können nicht in demselben Gliede von B vereinigt sein, weil sonst der Cyclus 0 1 i geschlossen wäre. Man betrachte irgend ein Product von n Elementen, unter welchen (01) und (0i) aber nicht (1i) sei. An die Stelle von (0i) werde (1i) gesetzt, und das neue Product heifse dem ursprünglichen zugeordnet, so leuchtet ein, dafs zwei zugeordnete Producte zugleich cyclisch und zugleich nicht-cyclisch sind. Hieraus folgt, dafs der Ausdruck B die Elemente (0i), (1i) nur in der Verbindung (0i)+(1i) enthält, wo i eine der Zahlen 2, 3, ... n bedeutet. Der von dem Index 0 unabhängige Theil des Ausdrucks B ist aber offenbar nichts Anderes als

$$A(1, 2, \ldots n),$$

folglich ist nach dem so eben Erwiesenen

$$B(0, 1, \ldots n) = A(\overline{0+1}, 2, 3, \ldots n),$$

d. h. die Summe A besitzt die Eigenschaft 4. Hiermit ist die Identität der Ausdrücke S und der Summen nicht-cyclischer Producte A vollständig dargethan.

Es möge noch schliefslich angedeutet werden, wie sich mit Hülfe der oben gegebenen Entwicklung des Ausdrucks S auch die Gliederzahl desselben bestimmen läfst. Man vermehre in S sowie in der Entwicklung von S jeden Index um i und setze alsdann an die Stelle des Index i das Aggregat $0+1+\cdots+i$, welches der Kürze halber mit i' bezeichnet werde. Der Ausdruck

$$(i', i+1, \ldots i+n)$$

in welchen jetzt S übergeht, heifse T, seine Gliederzahl τ, so ist

$$\tau = (i+1)(i+n+1)^{n-1}.$$

In der That, die Entwicklung von T, d. h. diejenige, in welche die frühere Entwicklung von S übergegangen ist, enthält Ausdrücke, welche dem T ähnlich gebildet sind, für welche aber die Zahlen i, n durch andere ersetzt sind und zwar n überall durch kleinere. Indem man im Fall solcher Ausdrücke, die einem kleineren an die Stelle von n gesetzten Werthe entsprechen, die Formel für τ als gültig voraussetzt, zeigt es sich, dafs sie auch für T selbst gilt. Für $n=1$ giebt aber die Formel den richtigen Werth $\tau = i+1$, also ist sie allgemein gültig.

Für $i=0$ geht T in S über und τ in die Gliederzahl σ von S, welche durch die Formel

$$\sigma = (n+1)^{n-1}$$

bestimmt ist.

Berlin, den 12ten Mai 1859.

Ueber eine mit der Gammafunction verwandte Transcendente und deren Anwendung auf die Integralrechnung.

(Von Herrn *Kinkelin* früher zu Aarburg gegenwärtig zu Bern.)

Theorie der Function $G(x)$.

§. 1.

Ich habe früher eine Untersuchung über die Functionen, welche die Relation eingehen:

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= n\varphi(n)+n\psi(n)f(nx)+n^2\psi'(n).x+n^3\psi''(n).x^2+\cdots+n^{\mu+1}\psi^{(\mu)}(n).x^\mu,$$

veröffentlicht (siehe *Grunerts* Archiv Bd. 22), und bin dabei auf eine Function

$$f(x) = a-(a_1+a_2+\cdots+a_{\mu-1})B_{\mu-1}(x)$$
$$-\mu a_\mu \log^{(\mu-1)}\Gamma(x)+a_{\mu-1}B_{\mu-2}(x)+a_{\mu-2}B_{\mu-3}(x)+\cdots+a_1(x-1)$$

gekommen, in welcher $\log^{(\mu-1)}\Gamma(x)$ für ganze Werthe von x die Bedeutung

$$\log^{(\mu-1)}\Gamma(x) = 1^{\mu-1}\log 1+2^{\mu-1}\log 2+\cdots+(x-1)^{\mu-1}\log(x-1)$$

hat und allgemein

$$\log^{(\mu-1)}\Gamma(x+1) = x^{\mu-1}\log x+\log^{(\mu-1)}\Gamma(x)$$

ist, welche Gleichung sich auf jeden reellen Werth von x anwenden läfst. $B_\lambda(x)$ bedeutet die *Bernoulli*sche Function, deren Werth für ganze Argumente

$$1^\lambda+2^\lambda+\cdots+(x-1)^\lambda$$

ist, während sie im Allgemeinen der Relation

$$B_\lambda(x) = (x-1)^\lambda+B_\lambda(x-1)$$

genügt. Ihr Ausdruck wird von *Raabe* (Bd. 42 dieses Journals) durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$B_{2m}(x) = \frac{x^{2m+1}}{2m+1}-\tfrac{1}{2}x^{2m}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\frac{(-1)^{\lambda-1}}{2\lambda}\binom{2m}{2\lambda-1}B_\lambda.x^{2m-2\lambda+1},$$

$$B_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+2}}{2m+2}-\tfrac{1}{2}x^{2m+1}+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\frac{(-1)^{\lambda-1}}{2\lambda}\binom{2m+1}{2\lambda-1}B_\lambda.x^{2m-2\lambda+2},$$

wo $\binom{\mu}{\nu}$ den ν^{ten} Binomialcoefficienten der μ^{ten} Potenz und B_λ die λ^{te} ***Bernoulli***sche Zahl, positiv genommen, bedeutet. Für diese Functionen bestehen die der ersten Gleichung dieses Paragraphen entsprechenden folgenden Gleichungen:

$$B_{2m}(x)+B_{2m}\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+B_{2m}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n^{2m}}B_{2m}(nx),$$

$$B_{2m+1}(x)+B_{2m+1}\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+B_{2m+1}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m+1}}B_{2m+1}(nx)+\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\cdot\frac{n^{2m+2}-1}{n^{2m+1}}B_{m+1},$$

so dafs man z. B. für die Function:

$$B_1(x)=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x,$$

die im Folgenden anzuwendende Relation

$$B_1(x)+B_1\left(x+\frac{1}{n}\right)+\cdots+B_1\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}B_1(nx)-\frac{1}{12}\frac{n^2-1}{n}$$

hat.

Gegenstand vorliegenden Aufsatzes soll es nun sein, die Function $\overset{(\mu-1)}{\Gamma'}(x)$ für den besonderen Fall $\mu-1=1$, also die Function $\overset{(1)}{\Gamma'}(x)$, die wir der gröfseren Bequemlichkeit wegen mit $G(x)$ bezeichnen wollen, näher zu untersuchen, ihre Eigenschaften festzustellen, ihre Berechnung anzugeben und dann einige Anwendungen dieser Resultate auf die Ermittelung von Integralwerthen zu machen.

§. 2.

Das mit dem Namen der ***Gammafunction*** bezeichnete ***Euler***sche Integral

$$(1.)\qquad \Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dx,$$

welches auch als Grenzwerth des folgenden Ausdrucks definirt werden kann:

$$(2.)\qquad \Gamma(x)=\lim_{k=\infty}\frac{1.2.3\ldots k.k^{x-1}}{x(x+1)\ldots(x+k-1)},$$

hat bekanntlich die in den Gleichungen

$$(3.)\qquad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

$$(4.)\qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$$

enthaltenen Eigenschaften, wozu wir noch das von ***Raabe*** (Bd. 28, S. 12 dieses Journals) veröffentlichte Ergebnifs

$$(5.) \quad \int_0^1 \log \Gamma(t+x)\,dt = x\log x - x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

hinzufügen.

Nun setze man der Kürze wegen:

$$(6.) \quad \int_0^x \log \Gamma(t)\,dt = F(x),$$

so geht (5.) über in:

$$(5^a.) \quad F(x+1) - F(x) = x\log x - x + \tfrac{1}{2}\log 2\pi,$$

eine Gleichung, die für alle positiven Werthe von x besteht. Man summire dieselbe in Beziehung auf x über die ganzzahligen Werthe 1, 2, ... $x-1$, so erhält man:

$$F(x) - F(1) = \sum_1^{x-1} x\log x - \frac{x(x-1)}{2} + \tfrac{1}{2}(x-1)\log 2\pi,$$

oder da aus (5.)

$$F(1) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi$$

hervorgeht,

$$\sum_1^{x-1} x\log x = F(x) + \frac{x(x-1)}{2} - \tfrac{1}{2}x\log 2\pi.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung behält für alle positiven Werthe von x eine bestimmte Bedeutung, ich bezeichne dieselbe mit $\log G(x)$ und definire diese Function durch die Gleichung:

$$(7.) \quad \log G(x) = F(x) + \frac{x(x-1)}{2} - \tfrac{1}{2}x\log 2\pi,$$

so ist $G(x)$ eine Function, die für ganzzahlige Werthe von x in die Exponentialgröfse mit dem Exponenten $\sum_1^{x-1} x\log x$ d. h. in $1^1.2^2\ldots(x-1)^{x-1}$ übergeht.

§. 3.

Setzt man in (2.) t für x, nimmt auf beiden Seiten die Logarithmen, und bezeichnet wie gewöhnlich das Product der Zahlen $1.2\ldots k$ mit $k!$, so erhält man:

$$(2^a.) \quad \log \Gamma(t) = \log(k!) + (t-1)\log k - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1} \log(t+\lambda).$$

Wir verstehen in dieser Formel sowohl wie später überhaupt unter k eine über jede endliche Grenze hinaus wachsende Zahl.

Integrirt man nun die soeben entwickelte Gleichung in Bezug auf t zwischen den Grenzen 1 und x, so folgt aus Gleichung (6.) und unter Anwendung des Werthes von $F(1)$:

$$F(x) - \tfrac{1}{2}\log 2\pi = (x-1)\log(k!) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2\log k$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}\{(x+\lambda)\log(x+\lambda) - (x+\lambda)\} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}\{(\lambda+1)\log(\lambda+1) - (\lambda+1)\}.$$

Diese Gleichung enthält unter Anderem den bekannten für grofse Zahlen geltenden Näherungswerth der Facultäten. Man findet ihn aus derselben in der Form:

$$(8.) \qquad k! = e^{-k}k^k\sqrt{2\pi k},$$

indem man $x=2$ setzt. Man hat sich dabei nur zu erinnern, dafs aus (5^a.) $F(2) = \log 2\pi - 1$ folgt, und dafs wegen der über k gemachten Voraussetzungen $k^{k+1}.e$ für $(k+1)^{k+1}$ geschrieben werden kann.

Die obige Entwicklung von $F(x)$ in Gleichung (7.) eingesetzt, giebt:

$$\log G(x) = \tfrac{1}{2}x(x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)\log 2\pi + (x-1)\log(k!) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2\log k + k(x-1)$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}(x+\lambda)\log(x+\lambda) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}(\lambda+1)\log(\lambda+1)$$

oder mit Anwendung von (8.):

$$\log G(x) = \tfrac{1}{2}x(x-1) + \tfrac{1}{2}x(x-1)\log k + k(x-1)\log k$$
$$- \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k-1}(x+\lambda)\log(x+\lambda) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\lambda\log\lambda$$

oder endlich, indem man wiederum von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$(9.) \qquad G(x) = \frac{1^1.2^2\ldots k^k.k^{k(x-1)+\frac{1}{2}x(x-1)}}{x^x(x+1)^{x+1}\ldots(x+k-1)^{x+k-1}}\cdot e^{\frac{1}{2}x(x-1)}.$$

Setzt man hierin $x+1$ für x und dividirt die entstandene Gleichung durch die vorangehende, so folgt:

$$G(x+1) = G(x)\cdot\frac{x^x k^{k+x}}{(x+k)^{x+k}}\cdot e^x$$

oder, da

$$\frac{k^{k+x}}{(x+k)^{x+k}} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^x} = e^{-x}$$

ist:

$$(10.) \qquad G(x+1) = x^x G(x).$$

Da nun für $x=1$ aus (9.)

$$G(1) = 1$$

folgt, so ist für ganze Werthe von x:

$$(11.) \qquad G(x+1) = 1^1.2^2 \ldots x^x,$$

was schon aus der Definition des §. 2 hervorging.

Es bestehen Relationen zwischen dieser Transcendenten G und den Gammafunctionen, welche jetzt angegeben werden sollen. Zunächst ist:

$$x^x.(x+1)^{x+1} \ldots (x+k-1)^{x+k-1}$$
$$= [x.(x+1) \ldots (x+k-1)]^{x-1} x^1.(x+1)^2 \ldots (x+k-1)^k.$$

Aus (2.) folgt aber unter Anwendung von (8.)

$$x(x+1) \ldots (x+k-1) = \frac{e^{-k} k^{k+x-1} \sqrt{2\pi k}}{\Gamma(x)},$$

also erhält man, wenn diese Ausdrücke in (9.) eingeführt werden:

$$(12.) \qquad G(x) = \frac{1^1.2^2 \ldots k^k . e^{\frac{1}{2}x(x-1)+k(x-1)}}{(2\pi)^{\frac{x-1}{2}} k^{\frac{(x-1)^2}{2}} \cdot x^1 (x+1)^2 \ldots (x+k-1)^k} \cdot (\Gamma'(x))^{x-1},$$

eine Gleichung, welche die Functionen G und Γ in Beziehung zu einander setzt.

Schreibt man nun in dieser Gleichung zunächst $1+x$ für x, dann, unter der Voraussetzung dafs $x<1$, $1-x$ für x, und multiplicirt die erhaltenen Resultate, so folgt mit Zuziehung von (3.):

$$(13.) \quad G(1+x).G(1-x) = \left\{ \frac{(\Gamma(1+x))^2 \sin \pi x}{\pi x} \right\}^x \cdot \frac{e^{x^2}}{k^{x^2} \left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)^1 \left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)^2 \cdots \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^k}.$$

§. 4.

Schreiten wir nun zur Untersuchung des Ganges der Function $G(x)$, so ist aus (9.) ersichtlich, dafs dieselbe für alle positiven Werthe von x ein positives Vorzeichen besitzt. Es ist ferner, wie bereits erwähnt, $G(1)=1$. Setzt man in (10.) nach einander $x=0$ und $x=1$ und erinnert sich daran, dafs sich x^x für $x=0$ der Grenze 1 nähert, so schliefst man aus dem bekannten Werthe der Function für $x=1$ weiter, dafs sie für $x=0$ und $x=2$ denselben Werth erhält, so dafs:

$$(14.) \qquad G(0) = G(1) = G(2) = 1.$$

Schon hieraus wird man schliefsen, dafs zwischen je zweien dieser Werthe ein Maximums- oder Minimumswerth enthalten sein mufs. Klarer geht dies indefs aus der Gleichung (7.) hervor, aus deren Differentiation mit Berück-

sichtigung von (6.) folgt:

$$\frac{d\log G(x)}{dx} = \log \Gamma(x) + x - \tfrac{1}{2}(1+\log 2\pi)$$
$$= \log \Gamma(x) + x - 1{,}419\ldots$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\log G(x)$ mit X, seinen Differentialquotienten nach x mit X', so hat man also:

$$X' = \log \Gamma(x) + x - 1{,}419\ldots$$

Es ist bekannt (*Gauſs*, disq. gen. circa seriem etc. art. 23), dafs $\Gamma(x)$ oder, was dasselbe ist, das *Gauſs*sche $\Pi(x-1)$ für $x=0$ sowie für $x=\infty$ unendlich grofs ist und dazwischen nur *ein* Minimum hat, nämlich für $x=1{,}462\ldots$ den Werth $0{,}886\ldots$. Hieraus geht mit Berücksichtigung der Werthe $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ für $\log \Gamma(x)$ hervor, dafs $\log \Gamma(x)$ von $x=0$ bis $x=1$ von $+\infty$ bis 0 abnimmt, dafs es dann negativ wird, für $x=1{,}462\ldots$ seinen Minimumswerth $-0{,}121\ldots$ annimmt, für $x=2$ wieder $=0$ wird und von da an bis $x=\infty$ fortwährend zunimmt. Man hat daher:

für $x=0$ $\quad X'=+\infty$,
- $x=1$ $\quad X'=-0{,}419\ldots$,
- $x=1{,}462\ldots$ $\quad X'=-0{,}078\ldots$,
- $x=2$ $\quad X'=+0{,}581\ldots$

und sieht daraus, dafs X' einmal von $x=0$ bis $x=1$ und einmal von $x=1{,}462$ bis $x=2$ verschwindet. Die erste dieser Wurzeln berechnet man, da die *Legendre*schen wie die *Gauſs*schen Tafeln der Gammafunction nur das Intervall von 1 bis 2 umfassen, am leichtesten, nachdem man in der Gleichung $X'=0$ an die Stelle von $\Gamma(x)$ den Quotienten $\frac{\Gamma(1+x)}{x}$ gesetzt hat, so dafs sich dieselbe unter der Form

$$0 = X' = \log \Gamma(1+x) + x - \log x - 1{,}419\ldots$$

darstellt. Dieselbe wird durch den Werth $x=0{,}291\ldots$ befriedigt. Die zweite zwischen $1{,}462\ldots$ und 2 liegende Wurzel ergiebt sich aus der ursprünglichen Form der Gleichung:

$$0 = X' = \log \Gamma(x) + x - 1{,}419\ldots,$$

und zwar findet sich für dieselbe der Werth $x=1{,}538\ldots$. Dies sind, wie sich zeigen läfst, die einzigen Wurzeln der Gleichung $X'=0$ von $x=0$ bis $x=\infty$, so dafs X' von $x=0$ bis $x=0{,}291\ldots$ positiv ist, von da bis $x=1{,}538\ldots$ negativ und von da bis $x=\infty$ wieder positiv. $X=\log G(x)$

wächst daher von $x=0$ bis $x=0{,}291\ldots$, wo es einen Maximumswerth hat, nimmt dann bis $x=1{,}538\ldots$ ab, wo es einen Minimumswerth hat, und wächst von da an ohne Unterbrechung bis $x=\infty$. Dasselbe gilt natürlich von $G(x)$ selbst.

Für negative Werthe von x hat $G(x)$ im Allgemeinen keinen bestimmten Sinn, da es alsdann nach (9.), sobald x keine ganze Zahl ist, gebrochene Potenzen negativer Zahlen enthält, d. h. Gröfsen, die, jenachdem x und in Folge dessen die Exponenten jener Potenzen rational oder irrational sind, mehrdeutig oder unendlich vieldeutig werden.

§. 5.

Zur Berechnung von $G(x)$ übergehend, nehme man an, dafs λ eine ganze Zahl, α einen echten Bruch bedeute, und setze $x=\lambda+\alpha$. Durch wiederholte Anwendung der Formel (10.) erhält man dann die Reductionsformeln:

$$(15.)\quad \begin{cases} G(\lambda+\alpha) = (\lambda-1+\alpha)^{\lambda-1+\alpha}(\lambda-2+\alpha)^{\lambda-2+\alpha}\ldots(1+\alpha)^{1+\alpha}\,G(1+\alpha), \\ G(\alpha) = \dfrac{G(1+\alpha)}{\alpha^{\alpha}}, \end{cases}$$

so dafs uns noch übrig bleibt $G(1+x)$ für Werthe von x, die zwischen 1 und 2 liegen, zu berechnen.

Man hat bekanntlich die Reihe (*Legendre*, intégr. Euleriennes, chap. IX, formule (12.))

$$\log\Gamma(1+t) = -Ct+\tfrac{1}{2}S_2t^2-\tfrac{1}{3}S_3t^3+\tfrac{1}{4}S_4t^4-\ldots,$$

in welcher

$$C = 0{,}57721566490153282\ldots$$

die *Mascheroni*sche Constante bedeutet, und $S_\lambda=\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^\lambda}$ ist.

Integrirt man dieselbe von $t=0$ bis $t=x$, so erhält man mit Berücksichtigung von (6.) und (7.):

$$\log G(1+x) = \tfrac{1}{2}(1-C)x^2-\tfrac{1}{2}x(\log 2\pi-1)+\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda S_\lambda}{\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda+1},$$

welche Reihe so lange convergirt als $0<x<1$. Um sie noch convergenter zu machen, benutze man die Reihe:

$$\log(1+t) = t-\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda}t^\lambda.$$

Diese nach t zwischen den Grenzen 0 und x integrirt, giebt:

$$(1+x)\log(1+x)-x=\tfrac{1}{2}x^2-\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda}{\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda+1},$$

welches zu $\log G(1+x)$ addirt, die Endgleichung liefert:

$$(16.)\quad \log G(1+x)$$
$$=\tfrac{1}{2}(2-C)x^2+\tfrac{1}{2}x(3-\log 2\pi)-(1+x)\log(1+x)+\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda(S_\lambda-1)}{\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda+1}.$$

Diese Reihe eignet sich nicht zur Berechnung von $G(1+x)$ für das Intervall, in welchem $\frac{1}{2}<x<1$. Man bemerkt jedoch leicht, dafs aus (10.) folgt:

$$\log G(2-x)=(1-x)\log(1-x)+\log G(1-x);$$

ist nun hierin $0<x<\frac{1}{2}$, so sieht man, dafs man durch diese Relation die Werthe von $G(1+x)$, für welche $\frac{1}{2}<x<1$, ausgedrückt erhält durch die Werthe von $G(1-x)$, für welche $0<x<\frac{1}{2}$. Diese letzteren findet man aber aus (16.), wenn dort x negativ gesetzt wird. Man hat daher in (16.) für x alle positiven und negativen Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ zu betrachten, um vermittelst derselben und der Gleichungen (15.) die Function G für alle beliebigen Argumente zu berechnen.

Es möge hier noch einer Reihe Erwähnung geschehen, die im Folgenden angewandt wird. Aus (10.) folgt nämlich sofort:

$$\log G(x)=\log G(1+x)-x\log x,$$

woraus man mit Hülfe von (16.) eine Reihe für $\log G(x)$ erhält. Wird zu derselben die aus (16.) für $\log G(1-x)$ folgende addirt, so gelangt man zu dem Resultate:

$$(17.)\quad \log G(x)+\log G(1-x)$$
$$=(2-C)x^2-(1-x)\log(1-x)-(1+x)\log(1+x)-x\log x-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{S_{2\lambda+1}-1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)}x^{2(\lambda+1)}.$$

§. 6.

Wir gehen nun zu dem für die hier betrachtete Function geltenden Multiplicationstheorem über. Für die Gammafunction hat man bekanntlich:

$$\Gamma(nx)=\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\cdot n^{nx-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}$$

oder, indem man die Logarithmen nimmt und t für x schreibt,

$$\log\Gamma(nt)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\log\Gamma\left(t+\frac{\lambda}{n}\right)+(nt-\tfrac{1}{2})\log n-\frac{n-1}{2}\log 2\pi.$$

Um hiervon zu einem ähnlichen Ergebnisse für die Function G überzugehen, erinnere man sich an die Gleichungen (6.) und (7.) §. 2, denen zufolge, wenn

$$\int_0^x \log \Gamma(t)\,dt = F(x)$$

gesetzt wird,

$$\log G(x) = F(x) + \frac{x(x-1)}{2} - \tfrac{1}{2} x \log 2\pi,$$

oder mit Einführung der in §. 1 gebrauchten Bezeichnung $B_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$,

$$\log G(x) = F(x) + B_1(x) - \tfrac{1}{2} x \log 2\pi$$

ist. Integrirt man die obige Gleichung nach t von 0 bis x, so erhält man:

$$0 = -\int_0^x \log \Gamma(nt)\,dt + \Sigma \int_0^x \log \Gamma\left(t + \frac{\lambda}{n}\right) dt + \tfrac{1}{2}(nx^2 - x)\log n - \frac{n-1}{2} x \log 2\pi,$$

oder da

$$\int_0^x \log \Gamma(nt)\,dt = \frac{1}{n} F(nx),$$

$$\int_0^x \log \Gamma\left(t + \frac{\lambda}{n}\right) dt = F\left(x + \frac{\lambda}{n}\right) - F\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

ist.

$$0 = -\frac{1}{n} F(nx) + \Sigma F\left(x + \frac{\lambda}{n}\right) - \Sigma F\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \tfrac{1}{2}(nx^2 - x)\log n - \frac{n-1}{2} x \log 2\pi,$$

wo die Summen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = n-1$ auszudehnen sind.

Ferner hat man für die Function $B_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)$, wie bereits im §. 1 erwähnt,

$$(18.) \qquad 0 = -\frac{1}{n} B_1(nx) + \Sigma B_1\left(x + \frac{\lambda}{n}\right) + \tfrac{1}{1\,2} \frac{n^2 - 1}{n}.$$

Endlich hat man für $-\frac{1}{2} x \log 2\pi$ die entsprechende Gleichung:

$$0 = \frac{1}{2n}(nx)\log 2\pi - \Sigma \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{\lambda}{n}\right)\log 2\pi + \tfrac{1}{2}\log 2\pi\,(n-1)(x + \tfrac{1}{2}).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich:

$$(19.) \qquad 0 = -\frac{1}{n}\log G(nx) + \Sigma \log G\left(x + \frac{\lambda}{n}\right) + \tfrac{1}{2}(nx^2 - x)\log n - \psi(n),$$

wo $\psi(n)$ constant, d. h. von x unabhängig und nur von der ganzen Zahl n abhängig ist.

§. 7.

Die Bestimmung der Constante $\psi(n)$ geschieht auf folgende Weise: Setzt man in Gleichung (19.) $x = 0$, so ergiebt sich:

$$(20.) \qquad \psi(n) = \Sigma \log G\left(\frac{\lambda}{n}\right),$$

da aus (14.) folgt, dafs $\log G(0) = 0$ ist. Die Gleichung (19.) wird also:

$$0 = -\frac{1}{n}\log G(nx) + \Sigma \log G\left(x + \frac{\lambda}{n}\right) - \Sigma \log G\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\log n}{n} B_1(nx).$$

wo sich die Summen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = n-1$ erstrecken. Aus dieser Gleichung läfst sich leicht eine Relation zwischen verschiedenen Gröfsen $\psi(n)$ herleiten. Ist nämlich m eine andere ganze Zahl, so setze man $x = \frac{\mu}{mn}$ und summire nach μ von $\mu = 0$ bis $\mu = m-1$, dann ergiebt sich:

$$0 = -\frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \log G\left(\frac{\mu}{m}\right) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \log G\left(\frac{\lambda m+\mu}{mn}\right) - m\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \log G\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\log n}{n}\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} B_1\left(\frac{\mu}{m}\right).$$

Die ersten drei Summen sind nichts anderes als $\psi(m)$, $\psi(mn)$ und $\psi(n)$, die vierte ergiebt sich aus Gleichung (18.) des vorigen Paragraphen, indem man m für n schreibt und $x = 0$ setzt,

$$= -\tfrac{1}{12}\frac{m^2-1}{m},$$

also hat man:

$$0 = -\frac{1}{n}\psi(m) - m\psi(n) + \psi(mn) - \frac{m^2-1}{12mn}\log n,$$

wo m und n irgend zwei ganze Zahlen sind. Indem man m mit n vertauscht, erhält man

$$0 = -n\psi(m) - \frac{1}{m}\psi(n) + \psi(mn) - \frac{n^2-1}{12mn}\log m$$

und, indem man die eine dieser Gleichungen von der andern abzieht,

$$0 = \frac{n^2-1}{n}\psi(m) - \frac{m^2-1}{m}\psi(n) + \frac{n^2-1}{n}\cdot\tfrac{1}{12}\frac{\log m}{m} - \frac{m^2-1}{m}\cdot\tfrac{1}{12}\frac{\log n}{n},$$

was man auch so schreiben kann:

$$\frac{\psi(m) + \frac{1}{12}\frac{\log m}{m}}{\frac{m^2-1}{m}} = \frac{\psi(n) + \frac{1}{12}\frac{\log n}{n}}{\frac{n^2-1}{n}}.$$

Man sieht hieraus, dafs der Bruch, welcher die rechte Seite dieser Gleichung bildet, eine Function von n ist, welche ungeändert bleibt, welche andere ganze Zahl m man auch für sie setzen möge, d. h. unabhängig von n. Der vorliegende Bruch ist also eine absolute Constante, die $= \frac{1}{2}\log\varpi$ gesetzt werden möge, so dafs:

$$(21.) \qquad \psi(n) + \tfrac{1}{12}\frac{\log n}{n} = \frac{n^2-1}{2n}\log\varpi,$$

und es bleibt jetzt nur der numerische Werth von $\log\varpi$ aus einem besonderen Werthe von n zu bestimmen.

§. 8.

Jeder besondere Werth von n kann zur Bestimmung des numerischen Werthes von $\log\varpi$ benutzt werden. Als besonders dazu geeignete bieten sich die Werthe $n=2$ und $n=4$ dar. Setzt man in (21.) $n=2$, so folgt mit Hülfe von (20.)

$$\tfrac{3}{4}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{2}\frac{\log 2}{2}+\log G(\tfrac{1}{2}),$$

setzt man dagegen $n=4$, so folgt:

$$\tfrac{15}{8}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{2}\frac{\log 4}{4}+\log G(\tfrac{1}{4})+\log G(\tfrac{1}{2})+\log G(\tfrac{3}{4})$$

und aus beiden durch Subtraction:

$$(21^a.)\qquad \tfrac{9}{8}\log\varpi = \log G(\tfrac{1}{4})+\log G(\tfrac{3}{4}),$$

wodurch man, wenn in (17.) $x=\frac{1}{4}$ gesetzt wird, für $\log\varpi$ die Reihe erhält:

$$(22.)\qquad \tfrac{9}{8}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{6}(2-C)+\tfrac{9}{2}\log 2-\tfrac{1}{4}(3\log 3+5\log 5)$$
$$-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{S_{2\lambda+1}-1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)}\cdot\frac{1}{4^{2(\lambda+1)}}.$$

Zur Bestimmung von $\log\varpi$ kann auch $n=\infty$ gesetzt werden.

Führt man nämlich in (21.) für $\psi(n)$ seinen aus (20.) folgenden Ausdruck ein, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{n^2-1}{2n}\log\varpi = {}_1\tfrac{1}{2}\frac{\log n}{n}+\Sigma\log G\Big(\frac{\lambda}{n}\Big),$$

die, nachdem sie mit $\frac{1}{n}$ multiplicirt und $n=\infty$ gesetzt worden ist, in das folgende Integral übergeht:

$$(23.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = \int_0^1 \log G(t)\,dt.$$

Setzt man hierin für $\log G(t)$ seinen aus (7.) folgenden Ausdruck, so erhält man:

$$(23^a.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = -{}_1\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\log 2\pi+\int_0^1 dx\int_0^x \log\Gamma(t)\,dt,$$

oder nach theilweiser Integration und mit Berücksichtigung des Integralwerthes:

$$\int_0^1 \log\Gamma(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\log 2\pi,$$

$$(22^a.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = -{}_1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\log 2\pi-\int_0^1 x\log\Gamma(x)\,dx.$$

Das hierin enthaltene Integral nimmt, wenn man $x = 1-y$ setzt, die Form an:

$$\int_0^1 x\,\Gamma(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,\Gamma(1-x)\,dx,$$

so dafs man auch das arithmetische Mittel beider:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 \log\Gamma(1-x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\}\,x\,dx$$

an die Stelle des in dem letzten Werthe von $\log\varpi$ vorkommenden Integrales setzen kann. So ergiebt sich:

$$\log\varpi = -\tfrac{1}{6} - \int_0^1 \{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\}\,x\,dx.$$

Aus der in §. 5. erwähnten Reihe für $\log\Gamma(1+\ell)$ erhält man leicht unter Anwendung der Gleichung

$$\log\Gamma(x) = \log\Gamma(1+x) - \log x$$

die folgende Reihe:

$$\tfrac{1}{2}\{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\} = -\tfrac{1}{2}\log x - Cx - \sum_1^\infty \frac{S_{2\lambda+1}}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda+1},$$

die auch, mit Benutzung der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = x + \sum_1^\infty \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1},$$

in die folgende verwandelt werden kann:

$$-\tfrac{1}{2}\{\log\Gamma(x) - \log\Gamma(1-x)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log x + \tfrac{1}{2}\log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1-x) + (C-1)x + \sum_1^\infty \frac{S_{2\lambda+1}-1}{2\lambda+1}\,x^{2\lambda+1}.$$

Multiplicirt man dies mit x und integrirt dann zwischen den Grenzen 0 und 1, so folgt für $\log\varpi$ sofort:

$$(22.)\qquad \tfrac{1}{2}\log\varpi = -\tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{3}C + \sum_1^\infty \frac{S_{2\lambda+1}-1}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)}.$$

Eine der Reihen (21.) oder (22.) dient zur numerischen Bestimmung von $\log\varpi$, und zwar findet man:

$$\log\varpi = 0{,}33084228,$$

woraus:

$$\varpi = 1{,}392140.$$

Es ist noch anzuführen, dafs ϖ auch vermittelst eines unendlichen Produkts ausgedrückt werden kann. Setzt man nämlich in (22^a.) für $\log\Gamma x$ den am Anfang von §. 3. in (2^a.) angegebenen Werth, so ergiebt sich mit Be-

nutzung von (8.)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \lambda \log \lambda = -\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{12} + \{\tfrac{1}{2}(k^2+k) + \tfrac{1}{12}\}\log k + \tfrac{1}{2}\log \varpi$$

oder, indem man zu den Zahlen übergeht,

$$1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots k^k = e^{-\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{12}} k^{\frac{1}{2}(k^2+k)+\frac{1}{12}} \sqrt{\varpi}.$$

Aus den Gleichungen (18.) und (20.) erhält man nun endlich das Multiplicationstheorem in der folgenden Gestalt:

(23.) $$G(nx) = \left\{G(x).G\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots G\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right\}^n \cdot n^{\frac{1}{2}nx(nx-1)+\frac{1}{12}} \varpi^{-\frac{1}{2}(n^2-1)}.$$

§. 9.

Die Gleichung (19.) des §. 6. läfst sich ebenso wie es von ***Raabe*** für die Gammafunction geschehen ist, dazu benutzen, das Integral $\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt$ vermöge eines Ueberganges vom Endlichen zum Unendlichen zu bestimmen. Durch n dividirt geht die Gleichung über in:

$$\Sigma \frac{1}{n} \log G\left(x+\frac{\lambda}{n}\right) = x^2 \left\{\frac{\log G(nx)}{n^2 x^2} - \tfrac{1}{2}\log n\right\} + x\frac{\log n}{2n} + \frac{\psi(n)}{n}.$$

Setzt man in dem Coefficienten von x^2 an die Stelle von $\log n$ die Differenz $\log nx - \log x$, so läfst sich dies Glied in die beiden trennen:

$$\tfrac{1}{2}x^2 \log x + x^2 \left\{\frac{\log G(y)}{y^2} - \tfrac{1}{2}\log y\right\},$$

wo $y = nx$. Läfst man nun n ins Unendliche wachsen, so dafs auch y ins Unendliche wächst, so nähert sich, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, $\frac{\psi(n)}{n}$ der Constante $\frac{1}{2}\log\varpi = \alpha$, der Coefficient $\frac{\log n}{2n}$ von x der Grenze 0 und die linke Seite der endlichen Gröfse $\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt$. Es ist hieraus ersichtlich, dafs die von x unabhängige Gröfse, der sich für $y = \infty$ der Ausdruck $\frac{\log G(y)}{y^2} - \frac{1}{2}\log y$ nähert, ebenfalls eine endliche Constante β sein mufs, so dafs man die Gleichung

$$\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt = \tfrac{1}{2}x^2 \log x + \beta x^2 + \alpha$$

erhält. Der Werth von β ergiebt sich durch Differentiation nach x, denn man erhält auf diese Weise:

$$\log G(x+1) - \log G(x) = x \log x + (2\beta + \tfrac{1}{2})x.$$

Da aber nach Gleichung (10.) die Differenz linker Hand $= x \log x$ sein mufs, so ist $2\beta + \frac{1}{2} = 0$, $\beta = -\frac{1}{4}$, also:

$$\int_x^{x+1} \log G(t)\, dt = \tfrac{1}{4} x^2 (\log(x^2) - 1) + \tfrac{1}{2} \log \varpi.$$

Anwendung auf die Integralrechnung.

§. 10.

Multiplicirt man die Gleichung

$$\log \sin \pi t = \log \pi - \log \Gamma(t) - \log \Gamma(1-t),$$

die man aus (4.) erhält und die unter der Bedingung $0 < t < 1$ gilt, mit dt und integrirt zwischen den Grenzen 0 und x, so folgt mit Anwendung von (6.) und (7.) leicht:

$$(24.) \quad \int_0^x \log \sin \pi t\, dt = \log \frac{G(1-x)}{2^x G(x)}, \qquad 0 < x < 1.$$

Hieraus folgt, wenn $\frac{1}{2} - t$ für t gesetzt wird:

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \log \cos \pi t\, dt = \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)}{2^{x-\frac{1}{2}} G(\frac{1}{2}+x)}, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < +\tfrac{1}{2},$$

und hieraus wieder für $x = 0$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \cos \pi t\, dt = -\tfrac{1}{2} \log 2.$$

Dies zu der vorhergehenden Gleichung addirt giebt:

$$(25.) \quad \int_0^x \log \cos \pi t\, dt = \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)}{2^x G(\frac{1}{2}+x)}, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < +\tfrac{1}{2}.$$

Durch Subtraction der Gleichung (25.) von (24.) erhält man ferner:

$$(26.) \quad \int_0^x \log \operatorname{tang} \pi t\, dt = \log \frac{G(1-x)\, G(\frac{1}{2}+x)}{G(x)\, G(\frac{1}{2}-x)}, \qquad 0 < x < \tfrac{1}{2}$$

und durch theilweise Integration findet man aus (24.), (25.), (26.) leicht die folgenden Integrale:

$$\int_0^x t \operatorname{cotg} \pi t\, dt = \frac{1}{\pi} \left\{ x \log(2 \sin \pi x) - \log \frac{G(1-x)}{G(x)} \right\},$$
$$0 < x < 1,$$

$$\int_0^x t \operatorname{tang} \pi t\, dt = \frac{-1}{\pi} \left\{ x \log(2 \cos \pi x) + \log \frac{G(\frac{1}{2}+x)}{G(\frac{1}{2}-x)} \right\},$$
$$-\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2},$$

$$\int_0^x \frac{t\, dt}{\sin \pi t \cos \pi t} = \frac{1}{\pi} \left\{ x \log(\operatorname{tang} \pi x) + \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)\, G(x)}{G(1-x)\, G(\frac{1}{2}+x)} \right\},$$
$$0 < x < \tfrac{1}{2}.$$

nutzung von (8.)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \lambda \log \lambda = -\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{12} + \{\tfrac{1}{2}(k^2+k) + \tfrac{1}{12}\}\log k + \tfrac{1}{2}\log \varpi$$

oder, indem man zu den Zahlen übergeht,

$$1^1.2^2.3^3 \ldots k^k = e^{-\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{12}k^{\frac{1}{2}(k^2+k)+\frac{1}{12}}\sqrt{\varpi}}.$$

Aus den Gleichungen (18.) und (20.) erhält man nun endlich das Multiplicationstheorem in der folgenden Gestalt:

$$(23.)\quad G(nx) = \left\{G(x).G\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots G\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right\}^n . n^{\frac{1}{2}nx(nx-1)+\frac{1}{12}} \varpi^{-\frac{1}{2}(n^2-1)}.$$

§. 9.

Die Gleichung (19.) des §. 6. läfst sich ebenso wie es von ***Raabe*** für die Gammafunction geschehen ist, dazu benutzen, das Integral $\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt$ vermöge eines Ueberganges vom Endlichen zum Unendlichen zu bestimmen. Durch n dividirt geht die Gleichung über in:

$$\Sigma \frac{1}{n} \log G\left(x+\frac{\lambda}{n}\right) = x^2\left\{\frac{\log G(nx)}{n^2x^2} - \tfrac{1}{2}\log n\right\} + x\frac{\log n}{2n} + \frac{\psi(n)}{n}.$$

Setzt man in dem Coefficienten von x^2 an die Stelle von $\log n$ die Differenz $\log nx - \log x$, so läfst sich dies Glied in die beiden trennen:

$$\tfrac{1}{2}x^2 \log x + x^2\left\{\frac{\log G(y)}{y^2} - \tfrac{1}{2}\log y\right\},$$

wo $y = nx$. Läfst man nun n ins Unendliche wachsen, so dafs auch y ins Unendliche wächst, so nähert sich, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, $\frac{\psi(n)}{n}$ der Constante $\frac{1}{2}\log\varpi = \alpha$, der Coefficient $\frac{\log n}{2n}$ von x der Grenze 0 und die linke Seite der endlichen Gröfse $\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt$. Es ist hieraus ersichtlich, dafs die von x unabhängige Gröfse, der sich für $y = \infty$ der Ausdruck $\frac{\log G(y)}{y^2} - \frac{1}{2}\log y$ nähert, ebenfalls eine endliche Constante β sein mufs, so dafs man die Gleichung

$$\int_x^{x+1} \log G(t)\,dt = \tfrac{1}{2}x^2 \log x + \beta x^2 + \alpha$$

erhält. Der Werth von β ergiebt sich durch Differentiation nach x, denn man erhält auf diese Weise:

$$\log G(x+1) - \log G(x) = x \log x + (2\beta + \tfrac{1}{2})x.$$

Da aber nach Gleichung (10.) die Differenz linker Hand $= x \log x$ sein mufs, so ist $2\beta + \frac{1}{2} = 0$, $\beta = -\frac{1}{4}$, also:

$$\int_x^{x+1} \log G(t)\, dt = \tfrac{1}{4} x^2 (\log(x^2) - 1) + \tfrac{1}{2} \log \varpi.$$

Anwendung auf die Integralrechnung.

§. 10.

Multiplicirt man die Gleichung

$$\log \sin \pi t = \log \pi - \log \Gamma(t) - \log \Gamma(1-t),$$

die man aus (4.) erhält und die unter der Bedingung $0 < t < 1$ gilt, mit dt und integrirt zwischen den Grenzen 0 und x, so folgt mit Anwendung von (6.) und (7.) leicht:

$$(24.) \quad \int_0^x \log \sin \pi t\, dt = \log \frac{G(1-x)}{2^x G(x)}, \qquad 0 < x < 1.$$

Hieraus folgt, wenn $\frac{1}{2} - t$ für t gesetzt wird:

$$\int_{\frac{1}{2}}^x \log \cos \pi t\, dt = \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)}{2^{x-\frac{1}{2}} G(\frac{1}{2}+x)}, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < +\tfrac{1}{2},$$

und hieraus wieder für $x = 0$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log \cos \pi t\, dt = -\tfrac{1}{2} \log 2.$$

Dies zu der vorhergehenden Gleichung addirt giebt:

$$(25.) \quad \int_0^x \log \cos \pi t\, dt = \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)}{2^x G(\frac{1}{2}+x)}, \qquad -\tfrac{1}{2} < x < +\tfrac{1}{2}.$$

Durch Subtraction der Gleichung (25.) von (24.) erhält man ferner:

$$(26.) \quad \int_0^x \log \operatorname{tang} \pi t\, dt = \log \frac{G(1-x)\, G(\frac{1}{2}+x)}{G(x)\, G(\frac{1}{2}-x)}, \qquad 0 < x < \tfrac{1}{2}$$

und durch theilweise Integration findet man aus (24.), (25.), (26.) leicht die folgenden Integrale:

$$\int_0^x t \operatorname{cotg} \pi t\, dt = \frac{1}{\pi} \left\{ x \log(2 \sin \pi x) - \log \frac{G(1-x)}{G(x)} \right\},$$
$$0 < x < 1,$$

$$\int_0^x t \operatorname{tang} \pi t\, dt = \frac{-1}{\pi} \left\{ x \log(2 \cos \pi x) + \log \frac{G(\frac{1}{2}+x)}{G(\frac{1}{2}-x)} \right\},$$
$$-\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2},$$

$$\int_0^x \frac{t\, dt}{\sin \pi t \cos \pi t} = \frac{1}{\pi} \left\{ x \log(\operatorname{tang} \pi x) + \log \frac{G(\frac{1}{2}-x)\, G(x)}{G(1-x)\, G(\frac{1}{2}+x)} \right\},$$
$$0 < x < \tfrac{1}{2}.$$

Das letzte dieser Integrale führt natürlich auch zu der Bestimmung des folgenden:

$$\int_0^x \frac{t\,dt}{\sin \pi t},$$

dessen Darstellung wir jedoch hier übergehen. Ebenso übergehen wir der Kürze wegen die drei Integrale $\int_0^x \frac{t^2 dt}{\sin^2 \pi t}$, $\int_0^x \frac{t^2 dt}{\cos^2 \pi t}$, $\int_0^x \frac{t^2 \cos \pi t\, dt}{\sin^2 \pi t}$, die sich aus den so eben dargestellten durch theilweise Integration herleiten lassen.

§. 11.

Es ist klar, dafs man in die Integrale (24.), (25.), (26.) durch die Substitution at für t gewisse Constanten einführen kann. Es ist ferner ersichtlich, dafs man durch Addition von diesen Integralen auf solche kommen kann, bei denen unter dem Integralzeichen der Logarithmus einer Summe oder Differenz der trigonometrischen Functionen sich vorfindet. Wir übergehen es, diese Integrale vollständig aufzustellen und führen als Beispiel nur eins derselben ohne weitere Entwicklung an. Es ist dies das folgende:

$$(27.) \quad \int_0^x \log(\cos bt - \cos at)\, dt$$

$$= \frac{2}{a+b} \log \frac{G(1-\frac{1}{2}(a+b)x)}{G(\frac{1}{2}(a+b)x)} + \frac{2}{a-b} \log \frac{G(1-\frac{1}{2}(a-b)x)}{G(\frac{1}{2}(a-b)x)} - x \log 2,$$

$$a > b, \quad 0 < x < \frac{2}{a+b}.$$

Bemerkt man nun, dafs aus (7.)

$$\frac{d \log G(x)}{dx} = \log \Gamma(x) + x - \tfrac{1}{2}(1 + \log 2\pi)$$

folgt, und denkt man sich hierin $\varphi(ax)$ für x geschrieben, wo φ eine beliebige Function, a eine Constante bedeutet, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial \log G(\varphi(ax))}{\partial a} = \{\log \Gamma \varphi(ax) + \varphi(ax) - \tfrac{1}{2}(1 + \log 2\pi)\} \frac{\partial \varphi(ax)}{\partial a}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung erhält man aus (27.) durch Differentiation nach a leicht das folgende Integral:

$$(28.) \int_0^x \frac{t \sin at\, dt}{\cos b\pi t - \cos a\pi t} = \frac{2}{(a+b)^2 \pi} \log \frac{G(\frac{1}{2}(a+b)x)}{G(1-\frac{1}{2}(a+b)x)} + \frac{2}{(a-b)^2 \pi} \log \frac{G(\frac{1}{2}(a-b)x)}{G(1-\frac{1}{2}(a-b)x)}$$

$$+ \frac{x}{(a+b)\pi} \log \sin \tfrac{1}{2}(a+b)\pi x + \frac{x}{(a-b)\pi} \log \sin \tfrac{1}{2}(a-b)\pi x + \frac{2ax}{(a^2-b^2)\pi} \log 2,$$

$$a > b, \quad 0 < x < \frac{2}{a+b}.$$

Eine Anzahl von ähnlichen Ergebnissen findet man aus den dem Integrale (27.) verwandten, von welchen oben die Rede war.

§. 12.

Wir wenden uns jetzt zur Herleitung einer anderen Reihe von Integralen. Setzt man in (26.) $\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} at$ für t, so erhält man leicht:

$$(29.)\quad \int_0^x \frac{\log t\,dt}{1+a^2t^2}$$

$$= \frac{\pi}{a}\log\frac{G\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)G\left(1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)}{G\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)G\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} ax\right)} - \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang} ax\log a,$$

$$0<x<\infty,\quad 0<\operatorname{arc\,tang} ax<\tfrac{1}{2}\pi;$$

für $a=1$ und $x=1$ folgt hieraus:

$$(29^a.)\quad \int_0^1 \frac{\log t\,dt}{1+t^2} = 2\pi\log\frac{G(\frac{3}{4})}{G(\frac{1}{4})},$$

oder da nach $(20^a.)$

$$\log G(\tfrac{1}{4}) + \log G(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{9}{8}\log\varpi$$

ist,

$$(29^b.)\quad \int_0^1 \frac{\log t\,dt}{1+t^2} = \tfrac{9}{4}\pi\log\varpi - 4\pi\log G(\tfrac{1}{4}).$$

Mit Hülfe von (29.) läfst sich ein anderes Integral ebenfalls auf die Function G zurückführen. Es ist nämlich

$$\int_0^x \frac{a\,dx}{1+a^2+2a\cos x} = \frac{2a}{1-a^2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-a}{1+a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right),$$

$$\int_0^x \frac{\cos x\,dx}{1+a^2+2a\cos x} = \frac{x}{2a} - \frac{1+a^2}{a(1-a^2)}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-a}{1+a}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right),$$

$$a<1,\quad x<\pi,\quad 0<\operatorname{arc\,tang}<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Hieraus folgt durch Addition und Integration nach a zwischen den Grenzen 1 und a:

$$\int_0^x \log\frac{1+a^2+2a\cos t}{2+2\cos t}\,dt = x\log a - 2\int_1^a \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right)\frac{dt}{t}$$

oder

$$= (2x-\pi)\log a + 2\int_1^a \operatorname{arc\,tang}\frac{t+\cos x}{\sin x}\frac{dt}{t}$$

oder, da nach (25.)

$$\int_0^x \log(2+2\cos t)\,dt = 4\pi \log \frac{G\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\pi}\right)}$$

ist:

$$\int_0^x \log(1+a^2+2a\cos t)\,dt$$

$$= (2x-\pi)\log a + 4\pi \log \frac{G\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\pi}\right)} + 2\int_1^a \operatorname{arc\,tang} \frac{t+\cos x}{\sin x}\,\frac{dt}{t}$$

oder durch theilweise Integration des Integrals rechterhand:

$$(30.)\quad \int_0^x \log(1+a^2+2a\cos t)\,dt$$

$$= (2x-\pi)\log a + (\pi-x)\log\sin x + 2\operatorname{arc\,tang}\frac{a+\cos x}{\sin x}\cdot\log\frac{a}{\sin x}$$

$$+ 4\pi\log\frac{G\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}\right)}{G\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2\pi}\right)} - 2\int_{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x}^{\frac{a+\cos x}{\sin x}} \frac{\log(t-\operatorname{cotg} x)}{1+t^2}\,dt,$$

$$a<1,\quad x<\pi,\quad 0<\operatorname{arc\,tang}<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Hieraus folgt unter der Annahme, dafs $x=\frac{1}{2}\pi$, mit Hülfe von (29.) und (29^a.):

$$(30^a.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(1+a^2+2a\cos t)\,dt$$

$$= 2\operatorname{arc\,tang} a\,.\log a - 2\pi\log\frac{G\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)\cdot G\left(1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)}{G\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)\cdot G\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang} a\right)}.$$

Die entsprechenden Gleichungen für den Fall, dafs $a>1$, findet man aus den vorhergehenden leicht, wenn man $\frac{1}{a}$ für a setzt.

Es lassen sich noch eine grofse Anzahl anderer Integrale, die mit den bisher betrachteten verwandt sind, hieran anknüpfen, so namentlich $\int_0^x \frac{\operatorname{arc\,tang} at}{t}\,dt$, $\int_0^x \frac{\arcsin at}{t}\,dt$, $\int_0^x \frac{(\operatorname{arc\,tang} at)^2}{t^2}\,dt$, $\int_0^x \frac{\log t\,dt}{\sqrt{1-a^2t^2}}$, etc., doch übergehe ich der Kürze wegen die Entwicklung derselben.

Aarburg, im Juli 1856.

Sur l'Invariant le plus simple d'une fonction quadratique bi-ternaire, et sur le Résultant de trois fonctions quadratiques ternaires.

(Par M. *A. Cayley.*)

M. ***Sylvester*** a trouvé depuis longtemps, pour le résultant des trois fonctions quadratiques ternaires *)

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h\ )(x, y, z)^2,$$
$$(a',\ b',\ c',\ f',\ g',\ h')(x, y, z)^2,$$
$$(a'',\ b'',\ c'',\ f'',\ g'',\ h'')(x, y, z)^2,$$

une expression remarquable

$$12R = 16C_{12} - C_6^2,$$

où C_{12}, C_6 représentent des fonctions données des coefficients qui sont non seulement des invariants mais aussi des *combinants* des trois fonctions quadratiques (Voir le mémoire de M. ***Sylvester*** „On the Calculus of forms otherwise the theory of Invariants" §. VII. Camb. et Dub. Math. Journ. t. VIII pp. 256 — 269 année 1853, équation (*A.*) p. 267). Pour expliquer la formation de la fonction C_6. il convient de considérer la fonction quadratique bi-ternaire

$$U = (a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h\ )(x, y, z)^2\,(\xi, \eta, \zeta)^2$$
$$\begin{vmatrix} a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \\ A, & B, & C, & F, & G, & H \\ A', & B', & C', & F', & G', & H' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \end{vmatrix}$$

cette notation représentant la fonction

$$\begin{aligned} &(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h\ )(x, y, z)^2.\,\xi^2 \\ +&(a',\ b',\ c',\ f',\ g',\ h')(x, y, z)^2.\,\eta^2 \\ +&(a'',\ b'',\ c'',\ f'',\ g'',\ h'')(x, y, z)^2.\,\zeta^2 \\ +&(A,\ B,\ C,\ F,\ G,\ H\ )(x, y, z)^2.\,2\eta\zeta \\ +&(A',\ B',\ C',\ F',\ G',\ H')(x, y, z)^2.\,2\zeta\xi \\ +&(A'',\ B'',\ C'',\ F'',\ G'',\ H'')(x, y, z)^2.\,2\xi\eta. \end{aligned}$$

---

*) J'écris $(\ )(x, y, z)^2$ au lieu de $(\ )\widehat{(x, y, z)^2}$. Dans mes publications antérieures qui font partie de ce Journal le signe $(\frown)$ a été substitué aux parenthèses accouplées dont je me suis servi autre part, mais il vaut mieux omettre ce signe.

ou ce qui est la même chose

$$\begin{aligned}&(a\,x^2+b\,y^2+c\,z^2+2\,f\,yz+2\,g\,zx+2\,h\,xy)\,\xi^2\\+&(a'x^2+b'\,y^2+c'\,z^2+2\,f'\,yz+2\,g'\,zx+2\,h'\,xy)\,\eta^2\\+&(a''x^2+b''\,y^2+c''z^2+2f''\,yz+2\,g''\,zx+2\,h''\,xy)\,\zeta^2\\+&(A\,x^2+B\,y^2+C\,z^2+2F\,yz+2\,G\,zx+2\,H\,xy)\,2\,\eta\zeta\\+&(A'x^2+B'\,y^2+C'\,z^2+2F'\,yz+2\,G'\,zx+2\,H'\,xy)\,2\,\zeta\xi\\+&(A''x^2+B''y^2+C''z^2+2F''yz+2G''zx+2H''xy)\,2\,\xi\eta.\end{aligned}$$

Soit $\overline{123}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix}\partial_{x_1}, & \partial_{y_1}, & \partial_{z_1}\\ \partial_{x_2}, & \partial_{y_2}, & \partial_{z_2}\\ \partial_{x_3}, & \partial_{y_3}, & \partial_{z_3}\end{vmatrix}$$

et $\overline{1'2'3'}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix}\partial_{\xi_1}, & \partial_{\eta_1}, & \partial_{\zeta_1}\\ \partial_{\xi_2}, & \partial_{\eta_2}, & \partial_{\zeta_2}\\ \partial_{\xi_3}, & \partial_{\eta_3}, & \partial_{\zeta_3}\end{vmatrix}$$

et soient U_1, U_2, U_3 ce que devient U lorsqu'on y écrit x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1, ζ_1; x_2, y_2, z_2, ξ_2, η_2, ζ_2; x_3, y_3, z_3, ξ_3, η_3, ζ_3 au lieu de x, y, z, ξ, η, ζ; on a alors cet invariant (analogue à l'invariant quadratique d'une fonction binaire d'ordre pair) savoir:

$$\frac{1}{384}\,\overline{123}^2.\,\overline{1'2'3'}^2\,U_1U_2U_3$$

où comme à l'ordinaire les valeurs x, y, z, ξ, η, ζ sont rétablies après les différentiations au lieu de x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1, ζ_1, etc.

Je représente cet invariant par

$$\begin{Bmatrix}a, & b, & c, & f, & g, & h\\ a', & b', & c', & f', & g', & h'\\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h''\\ A, & B, & C, & F, & G, & H\\ A', & B', & C', & F', & G', & H'\\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H''\end{Bmatrix};$$

on voit sans peine que l'invariant peut être développé et qu'alors il prend la forme

$$\begin{Bmatrix}a, & b, & c, & f, & g, & h\\ a', & b', & c', & f', & g', & h'\\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h''\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ A, & B, & C, & F, & G, & H \\ A, & B, & C, & F, & G, & H \end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix} a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ A', & B', & C', & F', & G', & H' \\ A', & B', & C', & F', & G', & H' \end{Bmatrix}$$

$$-\begin{Bmatrix} a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \end{Bmatrix}$$

$$+2\begin{Bmatrix} A, & B, & C, & F, & G, & H \\ A', & B', & C', & F', & G', & H' \\ A'', & B'', & C'', & F'', & G'', & H'' \end{Bmatrix},$$

où le premier terme

$$\begin{Bmatrix} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \end{Bmatrix}$$

dénote la fonction

$$\begin{aligned} &ab'c''+ab''c'+a'b''c+a'bc''+a''bc'+a''b'c \\ &-2af'f''-2a'f''f-2a''ff' \\ &-2bg'g''-2b'g''g-2b''gg' \\ &-2ch'h''-2c'h''h-2c''hh' \\ &+2fg'h''+2fg''h'+2f'g''h+2f'gh''+2f''gh'+2f''g'h \end{aligned}$$

et de même pour les autres termes. L'invariant contient les termes

$$\begin{aligned} &ab'c''+2AB'C''+2fg'h''+4FG'H'' \\ &-2af'f''-2aBC+2aF^2 \\ &-4AF'F''+4fAF-4fGH \end{aligned}$$

et on déduit de là son expression complète en y écrivant

$$ab'c''+ab''c'+a'b''c+a'bc''+a''bc'+a''b'c$$

au lieu de $ab'c''$;

$$af'f''+a'f''f+a''ff'+bg'g''+b'g''g+c''gg'+ch'h''+c'h''h+c''hh'$$

au lieu de $af'f''$, et ainsi de suite; la somme des coefficients est $6+2.6+2.6+4.6+2.9+2.9+2.9+4.9+4.9+4.9=216$, ce qui est exacte, car il n'y a pas de termes qui se détruisent, et dans l'expression

$\frac{1}{384}\overline{123}^2\overline{1'2'3'}^2 U_1 U_2 U_3$, le nombre des termes qui composent le produit des deux déterminants carrés est $36 \times 36 = 1296$, chacun de ces termes est multiplié par le facteur $8 \times 8 = 64$ introduit par la différentiation, et l'on a

$$\frac{1}{384} \times 64 \times 1296 = 216.$$

L'invariant qui vient d'être donné est lié avec l'invariant T de M. *Aronhold* (lequel se rapporte à une fonction ternaire cubique). C'est pour cela que je le désigne par la même lettre T, et pour fixer sa valeur j'écris

$$2T = ab'c'' + \text{etc.}$$

Cela posé je forme les deux combinants C_6 et C_{12} de la manière suivante.

Combinant du sixième ordre C_6. Soient U, V, W les trois fonctions quadratiques ternaires; considérez la fonction syzygétique $\lambda U + \mu V + \nu W$, où λ, μ, ν sont des quantités arbitraires, formez avec les variables ξ, η, ζ le réciprocant *) (multiplié par 2) de cette fonction, le résultat sera de l'ordre 2 par rapport aux coefficients de U, V, W, de l'ordre 2 par rapport à λ, μ, ν et de l'ordre 2 par rapport à ξ, η, ζ; c. à d. ce résultat sera une fonction quadratique bi-ternaire de λ, μ, ν et ξ, η, ζ dont l'invariant $2T$ (lequel sera par conséquent de l'ordre 6 par rapport aux coefficients de U, V, W) est le combinant C_6 qu'il s'agissait de trouver.

Combinant du douzième ordre C_{12}. Considérez comme auparavant la fonction syzygétique $\lambda U + \mu V + \nu W$, formez le discriminant (multiplié par 6) de cette fonction; le résultat sera de l'ordre 3 par rapport aux coefficients de U, V, W et de l'ordre 3 par rapport à λ, μ, ν; c. à d. il sera une fonction cubique ternaire de λ, μ, ν, dont l'invariant S de M. *Aronhold* **) (lequel sera de l'ordre 12 par rapport aux coefficients de U, V, W) est le combinant C_{12} qu'il s'agissait de trouver.

---

*) Le réciprocant de $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$ est

$$= -\begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \zeta \\ \xi, & a, & h, & g \\ \eta, & h, & b, & f \\ \zeta, & g, & f, & c \end{vmatrix}$$

$$= -(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H})(\xi, \eta, \zeta)^2.$$

**) Pour la fonction cubique ternaire

$$(a, b, c, i, j, k, i_1, j_1, k_1, l)(x, y, z)^3$$

On peut exprimer ces résultats d'une manière abrégée en disant que C_6 *est l'invariant* $2T$ *de la fonction bi-ternaire* $2R$ et que C_{12} *est l'invariant* S *de la fonction cubique ternaire* $6D$, R et D désignant le réciprocant et le discriminant de $\lambda U + \mu V + \nu W$.

Pour démontrer l'équation

$$12R = 16C_{12} - C_6^2$$

il suffit de faire voir que cette équation est vérifiée lorsqu'au lieu des trois fonctions données U, V, W on substitue trois fonctions de la forme $lU + mV + nW$, les coefficients l, m, n ayant été choisis de manière à simplifier autant que possible les expressions des trois fonctions. Il est facile de voir qu'il est permis de prendre pour les trois fonctions les formes dont s'est servi M. *Sylvester* dans son mémoire, savoir

$$\varrho(x^2 - y^2),$$
$$\sigma(y^2 - z^2),$$
$$y^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy.$$

Mais il suit des recherches de M. *Hesse*, et M. *Sylvester* aussi a depuis reconnu, qu'on peut prendre pour les trois fonctions les formes encore plus simples

$$x^2 + 2lyz,$$
$$y^2 + 2lzx,$$
$$z^2 + 2lxy,$$

qui se réduisent aux fonctions dérivées de la fonction cubique $x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz$. Or en prenant ces valeurs de U, V, W, on obtient

$$\lambda U + \mu V + \nu W = (\lambda, \mu, \nu, \lambda l, \mu l, \nu l)(x, y, z)^2.$$

Le réciprocant (multiplié par 2) est

---

l'invariant S est

$$\begin{aligned} = \quad & l^4 \\ & - 2l^2(jk_1 + ki_1 + ij_1) \\ & + 3l\ (ijk + i_1j_1k_1) \\ & + \ l\ (aii_1 + bjj_1 + ckk_1) \\ & - \ l\ abc \\ & - \ (ii_1j_1k + jj_1k_1i + kk_1i_1j) \\ & + \ (j^2k_1^2 + k^2i_1^2 + i^2j_1^2) \\ & + \ (bcj_1k + cak_1i + abi_1j) \\ & - \ (ai^2j + bj^2k + ck^2i + ai_1^2k_1 + bj_1^2i_1 + ck_1^2j_1) \end{aligned}$$

$$= -2\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta, \\ \xi, & \lambda, & \nu l, & \mu l \\ \eta, & \nu l, & \mu, & \lambda l \\ \zeta, & \mu l, & \lambda l, & \nu \end{vmatrix}$$

ce qui en forme développée donne le résultat

$$\begin{array}{rrrrrrr}
(-2l^2\lambda^2 & . & . & +2\mu\nu & . & . &)\xi^2 \\
+(\ . & -2l^2\mu^2 & . & . & +2\nu\lambda & . &)\eta^2 \\
+(\ . & . & -2l^2\nu^2 & . & . & +2\lambda\mu &)\zeta^2 \\
+(-2l\lambda^2 & . & . & +2l^2\mu\nu & . & . &)2\zeta\eta \\
+(\ . & -2l\mu^2 & . & . & +2l^2\nu\lambda & . &)2\xi\zeta \\
+(\ . & . & -2l\nu^2 & . & . & +2l^2\lambda\mu &)2\eta\xi
\end{array}$$

que l'on peut aussi exprimer comme fonction quadratique bi-ternaire, savoir:

$$(\lambda, \mu, \nu)^2(\xi, \eta, \zeta)^2.$$

$$\begin{vmatrix}
-2l^2 & . & . & 1 & . & . \\
. & -2l^2 & . & . & 1 & . \\
. & . & -2l^2 & . & . & 1 \\
-2l & . & . & l^2 & . & . \\
. & -2l & . & . & l^2 & . \\
. & . & -2l & . & . & l^2
\end{vmatrix}$$

En représentant l'invariant $2T$ par le développement incomplet donné ci-dessus on obtient dans le cas dont il s'agit

$$2T = \begin{Vmatrix} -2l^2 & . & . & 1 & . & . \\ . & -2l^2 & . & . & 1 & . \\ . & . & -2l^2 & . & . & 1 \end{Vmatrix}$$

$$- \begin{Vmatrix} -2l^2 & . & . & 1 & . & . \\ -2l & . & . & l^2 & . & . \\ -2l & . & . & l^2 & . & . \end{Vmatrix} - \text{etc. etc.}$$

$$+2\begin{Vmatrix} -2l & . & . & l^2 & . & . \\ . & -2l & . & . & l^2 & . \\ . & . & -2l & . & . & l^2 \end{Vmatrix}$$

ce qui se réduit à la valeur finale

$$\begin{aligned}
&-8l^6+2\\
&-(4l^6+4l^3+4l^3)\\
&-(4l^6+4l^3+4l^3)\\
&-(4l^6+4l^3+4l^3)\\
&+2(-8l^3+2l^6)\\
&=2(1-20l^3-8l^6).
\end{aligned}$$

Les invariants S et T de la fonction cubique $x^3+y^3+z^3+6lxyz$ sont

$$\begin{aligned}
S &= -l+l^4\\
T &= 1-20l^3-8l^6
\end{aligned}$$

l'invariant $2T$ de la fonction quadratique bi-ternaire est donc précisément égal à $2T$, où T est l'invariant qui vient d'être donné et on a

$$C_6 = 2T.$$

Le discriminant (multiplié par 6) de la fontion $\lambda U+\mu V+\nu W$ est

$$\begin{aligned}
&= 6\begin{vmatrix} \lambda, & l\nu, & l\mu\\ l\lambda, & \mu, & l\lambda\\ l\mu, & l\nu, & \nu \end{vmatrix}\\
&= 6\{-l^2\lambda^3-l^2\mu^3-l^2\nu^3+(1+2l^3)\lambda\mu\nu\}
\end{aligned}$$

où la fonction en parenthèses est ce que devient le Hessien de la fonction cubique $x^3+y^3+z^3+6lxyz$, lorsqu'on y substitue λ, μ, ν au lieu de x, y, z. Son invariant S est

$$\begin{aligned}
&= (1+2l^3)216l^6+(1+2l^3)^4\\
&= 1+8l^3+240l^6+464l^9+16l^4.
\end{aligned}$$

Cette quantité est en même temps un invariant de la fonction cubique

$$x^3+y^3+z^3+6lxyz,$$

et comme tel elle doit s'exprimer en fonction des deux invariants S et T de cette dernière. Et en effet la quantité dont il s'agit se réduit à

$$(1-20l^3-8l^6)^2-48(-l+l^4)^3 = T^2-48S^3.$$

Nous avons donc

$$C_{12} = T^2-48S^3,$$

et comme nous venons de trouver

$$C_6 = 2T,$$

l'équation $12R = 16C_{12}-C_6^2$ se réduit à

$$\begin{aligned} 12R &= 16(T^2 - 48S^3) - 4T^2 \\ &= 12T^2 - 768S^3 \end{aligned}$$

où enfin à

$$R = T^2 - 64S^3,$$

équation qui fait voir que le résultant R dont il s'agit est effectivement égal à $R = (1+8l^3)^3$, c. à d., au discriminant de la fonction cubique

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz,$$

ce qui donne la vérification du théorème général. Je m'étais servi d'abord d'une analyse moins simple, en considérant le cas dans lequel on prend pour les trois fonctions les formes

$$\begin{aligned} &x^2 - y^2, \\ &z^2 - y^2, \\ &x^2 + y^2 + z^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy. \end{aligned}$$

Il vaut la peine je crois, de donner les expressions correspondantes de C_6, C_{12}, R. On a ici à considérer la fonction

$$\lambda(x^2 - y^2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy) + \nu(z^2 - y^2)$$

laquelle peut s'écrire comme suit

$$(\mu + \lambda, \mu - \lambda - \nu, \mu + \nu, l\mu, m\mu, n\nu)(x, y, z)^2.$$

Le réciprocant (multiplié par 2) est

$$= -2 \begin{vmatrix} \xi, & \eta, & \zeta \\ \xi, \ \mu+\lambda, & n\mu, & m\mu \\ \eta, \ n\mu, & \mu-\lambda-\nu, & l\mu \\ \zeta, \ m\mu, & l\mu, & \mu+\nu \end{vmatrix}$$

et en écrivant a, b, c, f, g, h au lieu de $1-l^2$, $1-m^2$, $1-n^2$, $mn-l$, $nl-m$, $lm-n$, cette fonction est

$$\begin{aligned} = \quad & (2a\mu^2 - 2\lambda\mu - 2\nu\lambda - 2\nu^2)\xi^2 \\ & + (2b\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\mu\nu + 2\nu\lambda)\eta^2 \\ & + (2c\mu^2 - 2\nu\mu - 2\nu\lambda - 2\lambda^2)\zeta^2 \\ & + (2f\mu^2 - 2l\lambda\mu \quad\quad\quad)2\eta\zeta \\ & + (2g\mu^2 + 2m\lambda\mu + 2m\mu\nu)2\zeta\xi \\ & + (2h\mu^2 - 2n\nu\mu \quad\quad\quad)2\xi\eta \end{aligned}$$

ou écrite en forme de fonction quadratique bi-ternaire

$$= \begin{pmatrix} 0, & 2a, & -2, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & 2b, & 0, & 1, & 1, & 1 \\ -2, & 2c, & 0, & -1, & -1, & 0 \\ 0, & 2f, & 0, & 0, & 0, & -l \\ 0, & 2g, & 0, & m, & 0, & m \\ 0, & 2h, & 0, & -n, & 0, & 0 \end{pmatrix} (\lambda, \mu, \nu)^2 (\xi, \eta, \zeta)^2.$$

En exprimant comme auparavant l'invariant $2T$ par une somme de cinq termes, on trouve sans peine que ces termes sont respectivement $18 - 4l^2 - 4m^2 - 4n^2$, $-4l^2$, $-4m^2$, $-4n^2$, 0; l'invariant sera donc $-8(l^2+m^2+n^2)+18$; et l'on a pour le combinant du sixième ordre

$$C_6 = -8(l^2+m^2+n^2)+18.$$

Le discriminant (multiplié par 6) de la fonction $\lambda U + \mu V + \nu W$ est

$$= 6 \begin{vmatrix} \mu+\lambda, & n\mu, & m\mu, \\ n\mu, & \mu-\nu-\lambda, & l\mu \\ m\mu, & l\mu, & \mu+\nu \end{vmatrix}$$

$$= 0\lambda^3 + 6(1 - l^2 - m^2 - n^2 + 2lmn)\mu^3 + 0\nu^3$$
$$+ 6(m^2-n^2)\mu^2\nu - 6\nu^2\lambda - 6\lambda^2\mu - 6\mu\nu^2 - 6\nu\lambda^2 + 6(m^2-l^2)\lambda\mu^2 - 6\lambda\mu\nu$$
$$= (0, 6(1-l^2-m^2-n^2+2lmn), 0, 2(m^2-n^2), -2, -2, -2,$$
$$-2, 2(m^2-l^2), -1)(\lambda, \mu, \nu)^3$$
$$= (a, b, c, i, j, k, i_1, j_1, k_1, l)(\lambda, \mu, \nu)^3$$

où l'on a posé $a = 0$, $b = 6(1-l^2-m^2-n^2+2lmn)$, etc. L'invariant S de cette dernière fonction est

$$\begin{aligned} = \quad & 1 \\ & -2(-4(m^2-l^2)+4-4(m^2-n^2)) \\ & -3(8(m^2-n^2)+8(m^2-l^2)) \\ & -4b \\ & +16(m^2-n^2) - 16(m^2-n^2)(m^2-l^2) + 16(m^2-l^2) \\ & +16(m^2-n^2)^2 + 16 + 16(m^2-l^2)^2 \\ & +16b \end{aligned}$$
$$= 9 + 12b + 16(l^4+m^4+n^4-m^2n^2-n^2l^2-l^2m^2)$$

ou, si l'on substitue la valeur de b

$$C_{12} = 16(l^4+m^4+n^4-m^2n^2-n^2l^2-l^2m^2)$$
$$+144lmn - 72(l^2+m^2+n^2)+81.$$

On vient de trouver

$$C_6 = -8(l^2+m^2+n^2)+18,$$

équation qui donne

$$C_6^2 = 64(l^4+m^4+n^4+2m^2n^2+2n^2l^2+2l^2m^2) - 288(l^2+m^2+n^2)+324.$$

De ces résultats combinés on conclue

$$16C_{12}-C_6^2 = 192(l^4+m^4+n^4-2m^2n^2-2n^2l^2-2l^2m^2) + 2304lmn - 864(l^2+m^2+n^2)+972.$$

Évidemment l'expression du résultant est, à un facteur numérique près,

$$R = (3+2l+2m+2n)(3+2l-2m-2n)(3-2l+2m-2n)(3-2l-2m+2n)$$

ou en réduisant

$$R = 16(l^4+m^4+n^4-2m^2n^2-2n^2l^2-2l^2m^2) + 192lmn - 72(l^2+m^2+n^2)+81.$$

On retrouve donc

$$12R = 16C_{12}-C_6^2,$$

équation qu'il s'agissait de vérifier.

En terminant je remarque que la plus grande partie de ce mémoire est tiré d'un manuscrit daté „Machynlleth 13 Août 1853".

Londres, 22 Mars 1859.

Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Die älteste Theorie der Stabilität schwimmender Körper ist die Theorie des Metacentrums. Indem man den Körper ein wenig aus seiner Lage gedreht dachte, suchte man die Bedingung auf, welche erfüllt sein mufste, damit er das Bestreben zeige in seine frühere Lage zurückzukehren; und man hielt die Gleichgewichtslage für stabil, und nur dann für stabil, wenn diese Bedingung wirklich erfüllt wurde. Diese Theorie ist von ***Duhamel*** (Journal de l'école polyt., 24. Cah.) kritisirt und berichtigt worden; man kann ihr indefs den Vorwurf der Unvollständigkeit vielleicht noch aus andern Gründen machen, als welche ***Duhamel*** angiebt. Es könnte sein, dafs der Körper im ersten Augenblick sich aus seiner Lage noch weiter entfernte, aber durch den hydrodynamischen Druck zurückgeführt würde, ehe seine Oscillationen eine endliche Ausdehnung erreicht hätten. Und in diesem Falle würde der Körper also stabil sein, obwohl die alte Regel des Metacentrums das Gegentheil aussagen würde.

Indem man diese Regel verliefs, begann man die Gleichungen für die Oscillationen des Körpers aufzusuchen, und näherte sich so einer strengeren Behandlung. Diese Gleichungen finden sich in den Lehrbüchern von ***Poisson*** und ***Duhamel*** wenigstens dem Princip nach entwickelt und führen ebenfalls noch auf eine sehr einfache Regel.

Diese Gleichungen stützen sich indefs auf die Annahme, dafs man während der kleinen Bewegungen des Körpers den hydrodynamischen Druck durch den hydrostatischen ersetzen dürfe. Nun unterscheiden zwar beide Arten des Drucks sich in diesem Falle nur um unendlich kleine Gröfsen, welche von der Ordnung der auftretenden Geschwindigkeiten sind. Dennoch zeigt es sich, dafs man diesen Druck zu vernachlässigen nicht berechtigt ist. Denn es zerstören sich die hydrostatischen Druckkräfte bis auf unendlich kleine Gröfsen gegenseitig, da die Bewegungen in der Nähe der Gleichgewichtslage stattfinden; bei den hydrodynamischen Druckkräften hingegen, welche durch die Bewegung hinzutreten, findet eine derartige gegenseitige Vernich-

tung keineswegs statt, da sie im Allgemeinen überall der Bewegung des Körpers entgegengerichtet sein werden; und so sind offenbar die Wirkungen dieser Kräfte genau von derselben Ordnung, wie die Totalwirkung des hydrostatischen Drucks.

Durch diese Betrachtung leuchtet ohne Weiteres ein, dafs die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen eines schwimmenden Körpers nicht blos ungenau und etwa als erste Annäherung zu betrachten sind, sondern dieselben sind nothwendigerweise durchaus falsch, indem sie Glieder vernachlässigen, welche mit den berücksichtigten von derselben Ordnung sind und oft jene übertreffen, ja oft allein die Bewegung bestimmen, wie bei der Drehung eines symmetrischen Körpers um eine verticale Axe.

Ich habe daher im Folgenden eine strenge Theorie dieser Erscheinungen darzulegen versucht, indem ich die gleichzeitigen Bewegungen des Körpers und der Flüssigkeit neben einander betrachtet habe. Die Schwierigkeit der Aufgabe hat es nicht gestattet, einen speciellen Fall bis zu Ende zu verfolgen, viel weniger eine allgemeine einfache Regel abzuleiten; doch auch so scheint die Eigenthümlichkeit des Problems nicht ohne Interesse. Es zeigt sich, dafs eine transcendente Gleichung die Bewegung des Körpers bestimmt, welche daher unendlich vielfache Formen annehmen kann. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn diese Gleichung nur negative Wurzeln hat. Die Aufstellung der Gleichung hängt von der Bestimmung eines Potentials ab, welche sich zuletzt durch die allgemeine Auflösung der Aufgabe erledigen läfst, den stationären Wärmezustand der Flüssigkeit zu ermitteln, wenn durch die Oberfläche des Körpers (diesen ruhend gedacht) und durch das ruhende Niveau in jedem Augenblick gegebene Wärmemengen strömen. Es zeigt sich ferner, dafs die erwähnte Bedingungsgleichung von etwaigen Bewegungen der Flüssigkeit unabhängig ist; dafs hingegen jeder stabil schwimmende Körper durch kleine Bewegungen der Flüssigkeit in endliche Bewegungen versetzt werden kann, sobald ihre Periode mit einer derjenigen Perioden übereinstimmt, welche der Körper für sich in seinen Bewegungen anzunehmen bestrebt ist.

Am Schlusse sind einige Vereinfachungen angegeben, welche die Theorie annimmt, sobald der schwimmende Körper in Bezug auf zwei gegen einander senkrechte Vertikalebenen symmetrisch ist.

§. 1.

Gleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit.

Ein Körper von beliebiger Gestalt schwimme auf einer auf der Seite der positiven Z überall unbegrenzten Flüssigkeitsmasse, so dafs, wenn Alles sich in Ruhe befindet, die XY-Ebene das Niveau der Flüssigkeit bezeichnet. Wenn der Körper und die Flüssigkeit selbst durch kleine Anfangsgeschwindigkeiten und Anfangsverschiebungen aus der Ruhelage gebracht werden, so entstehen in der Flüssigkeit kleine Geschwindigkeiten, welche zur Zeit t für die Stelle x, y, z durch u, v, w bezeichnet werden sollen. An eben dieser Stelle herrscht dann ein Druck p, welcher sich von dem hydrostatischen Drucke $A+gmz$ (durch m die Masse der Volumeneinheit der Flüssigkeit und durch A den atmosphärischen Druck bezeichnet) um eine Gröfse P unterscheidet, welche von der Ordnung der kleinen Geschwindigkeiten u, v, w sein wird. Die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + m\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} + m\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$gm = \frac{\partial p}{\partial z} + m\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

kann man dann durch Einführung von P, sowie durch die Annahme vereinfachen, dafs bei der aufserordentlichen Kleinheit der Bewegungen nur die ersten Dimensionen der Geschwindigkeiten und ihrer Differentialquotienten berücksichtigt werden dürfen. Denn denkt man sich die Gröfsen P, u, v, w sämmtlich mit einem unendlich kleinen constanten Factor behaftet, welcher die Ordnung der Anfangsgeschwindigkeiten ausdrückt, und läfst man dann diesen Factor sich der Grenze Null nähern, so gehen die obigen Gleichungen über in:

$$0 = \frac{\partial P}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial y} + m\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$0 = \frac{\partial P}{\partial z} + m\frac{\partial w}{\partial t},$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Wenn man nun die ersten drei Gleichungen nach t integrirt und durch u_0, v_0, w_0 die Anfangsgeschwindigkeiten bezeichnet, so kommt:

$$u = u_0 - \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\partial P}{\partial x}\,dt,$$

$$v = v_0 - \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\partial P}{\partial y}\,dt,$$

$$w = w_0 - \frac{1}{m}\int_0^t \frac{\partial P}{\partial z}\,dt.$$

Wenn man dies in die letzte der obigen Gleichungen einführt, so erhält man

$$0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} - \frac{1}{m}\int_0^t \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) dt;$$

und es wird dieser Gleichung genügt, wenn ihr Differentialquotient nach t verschwindet, oder wenn, da u_0, v_0, w_0 nur Functionen von x, y, z sind,

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0,$$

und wenn aufserdem die Gleichung für einen beliebigen Werth von t, z. B. für $t = 0$, erfüllt wird, so dafs also

$$(2.) \qquad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichung (1.) zeigt, dafs die Abweichung P des hydrodynamischen Druckes von dem hydrostatischen ein Potential ist; während die zweite Gleichung eine nothwendige Bedingung zwischen den Anfangsgeschwindigkeiten feststellt.

Die Functionen P, u_0, v_0, w_0 haben noch verschiedenen andern Bedingungen zu genügen, welche sich auf die Oberfläche des eingetauchten Körpers, auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit und auf die in der Unendlichkeit gelegenen Punkte beziehen. In den letzteren wird man die Flüssigkeit als ruhend betrachten können, und es darf daher in ihnen der Druck von dem hydrostatischen sich nicht unterscheiden, so dafs überall im Unendlichen auf der positiven Seite der Z

$$(3.) \qquad P = 0.$$

An der Oberfläche des eingetauchten Körpers mufs die Normalgeschwindigkeit der berührenden Flüssigkeitstheilchen nothwendig mit der Normalgeschwindigkeit des berührten Punktes im festen Körper übereinstimmen. Bezeichnet man also durch $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ die Geschwindigkeiten eines Punktes der

Körperoberfläche, durch die Winkel α, β, γ die Richtung der von dem Körper abgewandten Normale, durch dn das Element derselben und durch $\frac{\partial P}{\partial n}$ den Ausdruck

$$\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma,$$

so erhält man die Gleichung:

$$(4.)\quad \bar{u}\cos\alpha+\bar{v}\cos\beta+\bar{w}\cos\gamma=u_0\cos\alpha+v_0\cos\beta+w_0\cos\gamma-\frac{1}{m}\int_0^t\frac{\partial P}{\partial n}\,dt.$$

In dieser Gleichung sind α, β, γ mit der Zeit veränderlich, und dieselbe gilt für alle Punkte der eingetauchten Körperoberfläche, deren Gleichung wiederum mit der Zeit veränderlich ist. Da aber alle diese Veränderungen unendlich klein sind, so würde die Berücksichtigung derselben obiger Gleichung nur unendlich kleine Gröfsen höherer Ordnung hinzufügen; man darf also mit Vernachlässigung höherer Ordnungen für α, β, γ die von der Zeit unabhängigen Werthe setzen, welche diese Gröfsen für die Ruhelage des Körpers annehmen, und darf zugleich die Gleichung (4.) für diejenigen Punkte gelten lassen, welche in der Ruhelage der Körperoberfläche angehören. Ist die Gleichung dieser Oberfläche in der Ruhelage

$$(5.)\quad f(x,y,z)=0,$$

so gilt also die Gleichung (4.) für alle Punkte dieser Oberfläche, welche positiven Werthen von Z entsprechen.

Behandelt man nun die Bedingungsgleichung (4.) wie oben die allgemeine Gleichung für P, so löst sie sich in die beiden auf:

$$(6.)\quad \frac{d\bar{u}}{dt}\cos\alpha+\frac{d\bar{v}}{dt}\cos\beta+\frac{d\bar{w}}{dt}\cos\gamma=-\frac{1}{m}\frac{\partial P}{\partial n},$$

welche zu jeder Zeit, und

$$(7.)\quad \bar{u}_0\cos\alpha+\bar{v}_0\cos\beta+\bar{w}_0\cos\gamma=u_0\cos\alpha+v_0\cos\beta+w_0\cos\gamma,$$

welche zur Zeit $t=0$ gelten mufs, und in welcher $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{w}_0$ die Anfangswerthe von $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ bezeichnen.

An der freien Oberfläche endlich mufs der hydrodynamische Druck

$$p=P+gmz+A$$

den Werth A annehmen, d. h. es mufs das vollständige Differential Null sein, oder, da $\frac{dz}{dt}=w$ ist,

$$0=gmw+\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf die freie Oberfläche, welche von der Ebene $z=0$ nur unendlich wenig abweicht. Man kann daher, ganz wie oben, diese Gleichung auf

$$(8.) \qquad 0 = gmw + \frac{\partial P}{\partial t}$$

reduciren, und sie für $z=0$ gelten lassen, indem man nur Gröfsen höherer Ordnung vernachlässigt.

Führt man hier für w seinen Werth ein, so kommt

$$\frac{\partial P}{\partial t} - g\int_0^t \frac{\partial P}{\partial z}\,dt + gmw_0 = 0;$$

und wenn man diese Gleichungen wie die früheren behandelt, erhält man für alle Werthe von t:

$$(9.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = g\frac{\partial P}{\partial z},$$

und für $t=0$:

$$(10.) \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_0 + gmw_0 = 0.$$

Man hat somit folgende Bedingungsgleichungen erhalten:

1. für alle Werthe von t und für alle Punkte der Flüssigkeit:

$$(11.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0;$$

2. für alle Werthe von t und für die verschiedenen Theile der Flüssigkeitsgrenze:

$$(12.) \quad \begin{cases} P = 0 \quad \text{(im Unendlichen)}, \\ \dfrac{d\bar{u}}{dt}\cos\alpha + \dfrac{d\bar{v}}{dt}\cos\beta + \dfrac{d\bar{w}}{dt}\cos\gamma = -\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial P}{\partial n} \quad (\text{für } f(x,y,z)=0), \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} = g\dfrac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{für } z=0); \end{cases}$$

3. für $t=0$:

$$(13.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad \text{(in der ganzen Flüssigkeit)}, \\ \bar{u}_0\cos\alpha + \bar{v}_0\cos\beta + \bar{w}_0\cos\gamma = u_0\cos\alpha + v_0\cos\beta + w_0\cos\gamma \\ \qquad\qquad (\text{für } f(x,y,z)=0), \\ \left(\dfrac{\partial P}{\partial t}\right)_0 + gmw_0 = 0 \quad (\text{für } z=0). \end{cases}$$

Von den letzten Gleichungen wird im Folgenden kein Gebrauch gemacht werden. Denn da die Gleichungen (11.), (12.) die Function P nicht

vollkommen bestimmen, und da diese allein, nicht aber u_0, v_0, w_0, in die spätern Gleichungen eingehen, so kann man sich die in der Flüssigkeit etwa vorhandenen Anfangsbewegungen durch die Willkürlichkeiten dargestellt denken, welche diese Function noch mit sich führt; und es würde dann immer möglich sein, wenn über P bereits vollständig verfügt ist, aus den Gleichungen (13.) angemessene Anfangsbewegungen darzustellen.

§. 2.

Gleichungen für die Bewegung des Körpers.

Um die Bewegung des eingetauchten Körpers zu untersuchen, lege ich in dem Körper ein Coordinatensystem fest, welches durch x', y', z' bezeichnet sein soll. Der Anfangspunkt desselben sei der Schwerpunkt; die Axe z' soll in der Ruhelage mit der Axe z zusammenfallen, so dafs sie vertical nach unten gerichtet ist und durch den Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmasse hindurchgeht; während die Axen x', y' für die Ruhelage den x, y parallel gehen.

Bezeichnet man nun durch z_0 die Coordinate des Schwerpunktes im System x, y, z für die Ruhelage, so sind beide Coordinatensysteme verbunden durch Gleichungen von der Form:

$$(14.)\qquad \begin{aligned} x &= \xi + \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y &= \eta + \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z', \\ z &= z_0 + \zeta + \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z'. \end{aligned}$$

Von den neun Cosinus α, β, γ etc. sind in dem Falle sehr kleiner Bewegungen drei, nämlich α, β_1, γ_2, bis auf Gröfsen der zweiten Ordnung gleich 1, und die übrigen sind unendlich kleine Gröfsen der ersten Ordnung. Die bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= 0, \\ \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= 0, \\ \gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

reduciren sich also dann auf

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\beta_2 = \varphi, \\ \alpha_2 &= -\gamma = \psi, \\ \beta &= -\alpha_1 = \vartheta, \end{aligned}$$

wo nun ϑ, φ, ψ unendlich kleine Winkel bedeuten, um welche man successive das eine Coordinatensystem drehen mufs, damit dasselbe in die Lage des

andern geführt werde. Und so gehen die Gleichungen (14.) bis auf Gröfsen höherer Ordnung in die folgenden über:

$$(15.)\qquad \begin{cases} x = x' + \xi + \vartheta y' - \psi z', \\ y = y' + \eta + \varphi z' - \vartheta x', \\ z = z' + z_0 + \zeta + \psi x' - \varphi y'. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Differentiation nach der Zeit:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + y' \frac{d\vartheta}{dt} - z' \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + z' \frac{d\varphi}{dt} - x' \frac{d\vartheta}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + x' \frac{d\psi}{dt} - y' \frac{d\varphi}{dt}; \end{cases}$$

und aus diesen gewinnt man die in §. 1 mit $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ bezeichneten Geschwindigkeiten, wenn man x', y', z' einen Punkt der Körperoberfläche bedeuten läfst. Zugleich kann man aber dann, was bis auf Gröfsen höherer Ordnung erlaubt ist, x', y', z' ersetzen durch x, y, $z - z_0$; und so gewinnt man für $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die Ausdrücke:

$$(17.)\qquad \begin{cases} \bar{u} = \frac{d\xi}{dt} + y \frac{d\vartheta}{dt} - (z - z_0) \frac{d\psi}{dt}, \\ \bar{v} = \frac{d\eta}{dt} + (z - z_0) \frac{d\varphi}{dt} - x \frac{d\vartheta}{dt}, \\ \bar{w} = \frac{d\zeta}{dt} + x \frac{d\psi}{dt} - y \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (16.) müssen nun in die allgemeinen Bewegungsgleichungen des Körpers eingeführt werden. Bezeichnet man durch A, B, C, A', B', C' die Gesammtcomponenten und die Drehungsmomente, welche von dem Gewichte des Körpers und dem hydrostatischen Druck herrühren; bezeichnet man durch do ein Oberflächenelement des Körpers, und also durch $P\cos\alpha\, do$, $P\cos\beta\, do$, $P\cos\gamma\, do$ die von dem Druck P in diesem Element herrührenden Componenten, so sind bekanntlich die Gleichungen der Bewegung folgende:

$$(18.)\qquad \begin{cases} \int \frac{d^2x}{dt^2} dm = A - \int P\cos\alpha\, do, \\ \int \frac{d^2y}{dt^2} dm = B - \int P\cos\beta\, do, \\ \int \frac{d^2z}{dt^2} dm = C - \int P\cos\gamma\, do; \end{cases}$$

$$(19.)\quad \begin{cases} \int\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)dm = A'-\int P(z\cos\beta-y\cos\gamma)\,do, \\ \int\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)dm = B'-\int P(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\,do, \\ \int\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)dm = C'-\int P(y\cos\alpha-x\cos\beta)\,do, \end{cases}$$

die Integrale links über den ganzen Körper, rechts über die ganze benetzte Oberfläche ausgedehnt.

Um hier zunächst die linken Theile zu reduciren, bezeichne ich durch M die Masse des ganzen Körpers; dann ist ohne Weiteres, da offenbar

$$\int x'\,dm = \int y'\,dm = \int z'\,dm = 0$$

zu setzen ist, in den Gleichungen (18.):

$$\int\frac{d^2x}{dt^2}dm = M\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$\int\frac{d^2y}{dt^2}dm = M\frac{d^2\eta}{dt^2},$$

$$\int\frac{d^2z}{dt^2}dm = M\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

In den Gleichungen (19.) bemerke man, dafs $\frac{d^2x}{dt^2}$ etc. bereits unendlich kleine Gröfsen sind; daher kann man x, y, z durch x', y', $z'+z_0$ ersetzen, und es wird dann:

$$\int\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)dm$$

$$= \int\left[(z'+z_0)\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+z'\frac{d^2\varphi}{dt^2}-x'\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)-y'\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}+x'\frac{d^2\psi}{dt^2}-y'\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\right]dm$$

$$= M\left(a_{11}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a_{12}\frac{d^2\psi}{dt^2}+a_{13}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+z_0\frac{d^2\eta}{dt^2}\right),$$

$$\int\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)dm$$

$$= \int\left[x'\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}+x'\frac{d^2\psi}{dt^2}-y'\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)-(z'+z_0)\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+y'\frac{d^2\vartheta}{dt^2}-z'\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)\right]dm$$

$$= M\left(a_{12}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a_{22}\frac{d^2\psi}{dt^2}+a_{23}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}-z_0\frac{d^2\xi}{dt^2}\right),$$

$$\int\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)dm$$

$$= \int\left[y'\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+y'\frac{d^2\vartheta}{dt^2}-z'\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)-x'\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+z'\frac{d^2\varphi}{dt^2}-x'\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)\right]dm$$

$$= M\left(a_{13}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a_{23}\frac{d^2\psi}{dt^2}+a_{33}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right);$$

wobei die Bezeichnungen eingeführt sind:

$$(20.)\quad \begin{cases} Ma_{11} = \int (y'^2 + z'^2)\, dm, & Ma_{23} = -\int y' z'\, dm, \\ Ma_{22} = \int (z'^2 + x'^2)\, dm, & Ma_{31} = -\int z' x'\, dm, \\ Ma_{33} = \int (x'^2 + y'^2)\, dm, & Ma_{12} = -\int x' y'\, dm. \end{cases}$$

Was ferner die Bestimmung von A, B, C, A', B', C' betrifft, so kann man diese Gröfsen dadurch bilden, dafs man in jedem Punkt des Körpers, dessen Volumenelement dv' sei, das Gewicht $gm'dv'$ abwärts, und in jedem Element dv des in die Flüssigkeit eingetauchten Theils, das Gewicht $gm\,dv$ der verdrängten Flüssigkeit aufwärts wirkend denkt. Alsdann erhält man $A = B = C' = 0$, und für A', B', C die Formeln:

$$\begin{aligned} C &= g\int m'dv' - gm\int dv, \\ A' &= -g\int y\, m'dv' + gm\int y\, dv, \\ B' &= g\int x\, m'dv' - gm\int x\, dv, \end{aligned}$$

wo rechts immer die ersten Integrale über den ganzen Körper, die andern aber nur über denjenigen Theil auszudehnen sind, welcher von der eingetauchten Oberfläche und dem horizontalen Niveau der Flüssigkeit abgegrenzt wird. Die erstern nehmen sogleich die Werthe

$$gM, \qquad -g\eta M, \qquad g\xi M$$

an. Um die letztern zu berechnen, theile ich die Integration in eine solche, welche über den von dem ursprünglichen Niveau $z' = -z_0$ abgegrenzten Körpertheil auszudehnen ist; und in eine andere, welche über den zwischen der ursprünglichen und der spätern Niveaufläche ($z' = -z_0$ und $z = 0$) liegenden Körpertheil auszudehnen ist. Der erste Theil liefert die Integrale

$$-gmV, \qquad gmV(\eta + \varphi z), \qquad -gmV(\xi - \psi z),$$

wo V das Volumen der verdrängten Flüssigkeit für die Ruhelage, z die Tiefe des Schwerpunkts dieses Volumens unter dem Schwerpunkt des Körpers bedeutet. In den letzten Theilen, welche sich über einen unendlich kleinen Raum erstrecken, kann man x, y durch x', y' ersetzen; dann aber wird, indem man nach z' integrirt und bemerkt, dafs

$$z' = -z_0 \quad \text{und} \quad z = 0 \quad \text{oder} \quad z' = -z_0 - \zeta - \psi x' + \varphi y'$$

die Grenzen der Integration sind,

$$-gm\int dv = -gm\int dx'\,dy'\,dz' = -gm\int(\zeta+\psi x'-\varphi y')\,dx'\,dy,$$
$$gm\int y\,dv = gm\int y'\,dx'\,dy'\,dz' = gm\int y'(\zeta+\psi x'-\varphi y')\,dx'\,dy',$$
$$-gm\int x\,dv = -gm\int x'\,dx'\,dy'dz' = -gm\int x'(\zeta+\psi x'-\varphi y')\,dx'\,dy'.$$

Die noch auszuführenden Integrale sind über die Fläche ausgedehnt, in welcher das ursprüngliche Niveau den Körper durchschneidet; nennt man dieselbe F und setzt

$$(21.)\begin{cases} F=\int dx'\,dy', & c_1F=\int x'\,dx'\,dy', & c_2F=\int y'\,dx'\,dy', \\ c_{11}F=\int y'^2\,dx'\,dy', & c_{22}F=\int x'^2\,dx'\,dy', & c_{12}F=-\int x'y'\,dx'\,dy', \end{cases}$$

so gehen endlich die obigen Integrale über in

$$-gm\int dv = -gmF(\psi c_1-\varphi c_2+\zeta),$$
$$gm\int y\,dv = -gmF(\varphi c_{11}+\psi c_{12}-\zeta c_2),$$
$$-gm\int x\,dv = -gmF(\varphi c_{12}+\psi c_{22}+\zeta c_1).$$

Und die Ausdrücke für A', B', C werden also, indem man noch die für das Gleichgewicht der Ruhelage nothwendige Gleichung $M=mV$ berücksichtigt, folgende:

$$C = -gmF(\psi c_1-\varphi c_2+\zeta),$$
$$A' = gmV.\varphi z-gmF(\varphi c_{11}+\psi c_{12}-\zeta c_2),$$
$$B' = gmV.\psi z-gmF(\varphi c_{12}+\psi c_{22}+\zeta c_1).$$

Fafst man nunmehr die ganze Entwicklung zusammen, so erhält man die Bewegungsgleichungen des Körpers:

$$(22.)\quad\begin{cases} M\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\int P\cos\alpha\,do, \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\int P\cos\beta\,do, \\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\int P\cos\gamma\,do-gmF(\psi c_1-\varphi c_2+\zeta); \end{cases}$$

$$(23.)\quad\begin{cases} M\left(a_{11}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a_{12}\frac{d^2\psi}{dt^2}+a_{13}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right) \\ =-\int P((z-z_0)\cos\beta-y\cos\alpha)\,do-gmF\left(\varphi\left(c_{11}-\frac{x}{F}\right)+\psi c_{12}-\zeta c_2\right), \\ M\left(a_{12}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a_{22}\frac{d^2\psi}{dt^2}+a_{23}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right) \\ =-\int P(x\cos\gamma-(z-z_0)\cos\alpha)\,do-gmF\left(\varphi c_{12}+\psi\left(c_{22}-\frac{x}{F}\right)+\zeta c_1\right), \\ M\left(a_{13}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a_{23}\frac{d^2\psi}{dt^2}+a_{33}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right) = -\int P(y\cos\alpha-x\cos\beta)\,do. \end{cases}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den gewöhnlichen linearen Gleichungen, welche die kleinen Bewegungen von Punktsystemen angeben, durch die Glieder, welche P enthalten, und deren Bestimmung ihrerseits wieder, nach den Gleichungen des §. 1, von den Werthen der Geschwindigkeiten des bewegten Körpers abhängen. Man kann indefs auf diese Gleichungen eine Behandlungsart anwenden, welche der Integration linearer Differentialgleichungen vollkommen analog ist, und welche im Folgenden auseinander gesetzt werden soll.

§. 3.

Bestimmung der Function P.

Die Function P ist ein Potential, welches nach (12.), (17.) den Bedingungen genügen mufs:

$$(24.)\quad \begin{cases} P = 0 \quad \text{(im Unendlichen)}, \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2} = g\dfrac{\partial P}{\partial z} \quad \text{(an der freien Oberfläche)}, \\ -\dfrac{1}{m}\dfrac{\partial P}{\partial n} = \dfrac{d^2\xi}{dt^2}\cos\alpha + \dfrac{d^2\eta}{dt^2}\cos\beta + \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\cos\gamma \\ \quad + \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}((z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma) + \dfrac{d^2\psi}{dt^2}(x\cos\gamma - (z-z_0)\cos\alpha) \\ \quad + \dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}(y\cos\alpha - x\cos\beta) \quad \text{(an der Oberfläche des Körpers)}. \end{cases}$$

Die letzte dieser Gleichungen führt darauf, sich die Function P entwickelt vorzustellen nach den geraden Differentialquotienten der sechs Gröfsen

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\quad \varphi,\ \psi,\ \vartheta,$$

so, dafs die Coefficienten dieser Differentialquotienten von der Zeit unabhängig seien und einzeln der Potentialgleichung genügen; ich denke mir daher P in der folgenden Form dargestellt:

$$(25.)\quad \begin{cases} P = Q + X_1\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + X_2\dfrac{d^4\xi}{dt^4} + X_3\dfrac{d^6\xi}{dt^6} + \cdots \\ \quad + Y_1\dfrac{d^2\eta}{dt^2} + Y_2\dfrac{d^4\eta}{dt^4} + Y_3\dfrac{d^6\eta}{dt^6} + \cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + \Theta_1\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} + \Theta_2\dfrac{d^4\vartheta}{dt^4} + \Theta_3\dfrac{d^6\vartheta}{dt^6} + \cdots, \end{cases}$$

wo die $X, Y, \ldots \Theta$ von t unabhängig sein sollen, während Q sowohl t als x, y, z enthalten mag. Diese Coefficienten unterliegen nach (24.) zu-

nächst sämmtlich der Bedingung, dafs sie im Unendlichen verschwinden müssen; sodann aber zeigt sich eine Reihe von Bedingungsgleichungen, wenn man in die zweite und dritte Gleichung (24.) die Form (25.) einführt und die Coefficienten der verschiedenen nach t genommenen Differentialquotienten verschwinden läfst. Von den sechs Reihen von Bedingungsgleichungen, welche hierdurch entstehen, setze ich nur die zu den X gehörigen hierher. Es wird:

An der Oberfläche des Körpers:

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial X_1}{\partial n} = \cos\alpha,$$

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial X_2}{\partial n} = 0,$$

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial X_3}{\partial n} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

An der freien Oberfläche der Flüssigkeit:

$$g\frac{\partial X_1}{\partial z} = 0,$$

$$g\frac{\partial X_2}{\partial z} = X_1,$$

$$g\frac{\partial X_3}{\partial z} = X_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man leicht, in Folge eines bekannten Satzes über die Potentiale, dafs die X sich successive vollständig bestimmen lassen. In der That kommt es nur darauf an, zu zeigen, dafs die Function X_n vollständig bestimmt ist, wenn an der Oberfläche, mag dieselbe frei oder durch den Körper begrenzt sein, ihr Differentialquotient nach der Normale gegeben ist, während die Function im Unendlichen verschwindet. Gäbe es aber zwei verschiedene Functionen dieser Art, so wäre ihre Differenz Φ ein Potential, dessen Differentialquotient nach der Normale überall an der Oberfläche verschwinden müfste, während im Unendlichen Φ selbst gleich Null wäre. Nun ist aber bekanntlich in Folge der Differentialgleichung der Potentiale:

$$\int\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right)dm = -\int\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}do,$$

das Integral rechts über den ganzen Umfang der Flüssigkeit ausgedehnt. Da nun überall auf demselben entweder Φ oder $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ verschwindet, so ist das

betrachtete Integral Null, daher an jeder Stelle der Flüssigkeit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Also mufs Φ einer Constanten gleich sein, welche wegen der Bedingung im Unendlichen nur den Werth Null haben kann. Daher sind die gedachten beiden Werthe von X_n einander gleich, d. h. die Function ist vollkommen bestimmt. Man bemerkt auch, dafs diese Aufgabe genau auf die andere zurückkommt, ***den Wärmezustand der Flüssigkeit zu bestimmen, wenn im Unendlichen die Temperatur überall Null ist, durch die (fest gedachte) Oberfläche des Körpers und durch das (ruhende) Niveau aber gegebene Wärmemengen einströmen.***

So folgt also, dafs der zweite Theil des Ausdrucks (25.) vollkommen bestimmt ist, und dafs also nur noch die Function Q zu bestimmen übrig bleibt. Für diese bleiben aber nach dem Vorhergehenden aus (24.) die Bedingungen übrig:

$$(26.)\quad \begin{cases} Q = 0, & \text{(im Unendlichen)}, \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = g \dfrac{\partial Q}{\partial z} & \text{(an der freien Oberfläche)}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial n} = 0 & \text{(an der Oberfläche des Körpers)}. \end{cases}$$

Hieraus ersieht man zunächst, ***dafs die Function Q von den im Körper vorhandenen Bewegungen ganz unabhängig ist.*** Man kann sagen, dafs sie denjenigen Theil des hydrodynamischen Druckes repräsentirt, welcher von den ursprünglichen Eigenbewegungen der Flüssigkeit abhängt. In der That sieht man ohne Weiteres ein, dafs Q genau den ganzen aus der Bewegung entstehenden Druck darstellen würde, wenn der eingetauchte Körper festgehalten würde. ***Und so kann man sich also unter Q den Druck denken, welchen beliebige Wellensysteme erregen, die in der Flüssigkeit entstehen und welche sich ebenso fortpflanzen, als wenn der Körper eine unbewegliche Begränzungsfläche bildete.***

Es läfst sich zeigen, dafs die Function Q nur Glieder enthalten kann, welche periodisch sind, nicht aber solche, welche mit Exponentialfactoren in Bezug auf t behaftet wären. Denn denkt man sich Q in eine Reihe von Gliedern aufgelöst, welche einzeln Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \varkappa Q$$

erfüllen, und welche offenbar einzeln den Gleichungen (26.) sowie der Po-

tentialgleichung genügen müfsten, so folgt für ein solches Glied:

$$\int\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2\right)dm = -\int Q\frac{\partial Q}{\partial z}\,do,$$

rechts über die ganze freie Oberfläche integrirt; oder auch nach (26.)

$$= -\frac{1}{g}\int Q\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\,do = -\frac{\varkappa}{g}\int Q^2\,do,$$

was nur möglich ist, wenn $\varkappa$ eine negative Zahl bedeutet. Dann aber ist das betreffende Glied in Q mit einem $\sin t\sqrt{-\varkappa}$ oder $\cos t\sqrt{-\varkappa}$ behaftet.

Die Function P sondert sich also in zwei Theile, deren einer nur von den Bewegungen des Körpers abhängt, dagegen von den etwa in der Flüssigkeit selbstständig auftretenden Bewegungen ganz unabhängig ist, während bei dem andern das Gegentheil stattfindet. Auf diese Theilung läfst sich ein Verfahren begründen, welches die Natur der Bewegungen eines schwimmenden Körpers kennen lehrt.

§. 4.

Bedingung der Stabilität und Einflufs von Wellen, welche in der Flüssigkeit auftreten.

Die Gleichungen (22.), (23.) für die Bewegung des Körpers nehmen nunmehr die folgende Gestalt an, wenn man den Ausdruck (25.) darin einführt:

$$(27.)\quad \begin{cases} M\frac{d^2\xi}{dt^2}+\Sigma\int\left(X_i\frac{d^{2i}\xi}{dt^{2i}}+Y_i\frac{d^{2i}\eta}{dt^{2i}}+\cdots\right)\cos\alpha\,do = -\int Q\cos\alpha\,do, \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2}+\Sigma\int\left(X_i\frac{d^{2i}\xi}{dt^{2i}}+Y_i\frac{d^{2i}\eta}{dt^{2i}}+\cdots\right)\cos\beta\,do = -\int Q\cos\beta\,do, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Obwohl in diesen Gleichungen unendlich hohe Differentialquotienten vorkommen, so haben sie doch im Uebrigen vollständig den Character linearer simultaner Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und mit rechten Theilen, da die Glieder, welche Q enthalten, als bekannte Functionen der Zeit sich darstellen, sobald die in der Flüssigkeit auftretenden Wellenbewegungen bekannt sind. Man wird daher auch die bekannten Methoden für die Integration derartiger Systeme auf das vorliegende anwenden dürfen. So kann man also zunächst die Gleichungen ohne rechten Theil integriren, indem man

$$(28.)\qquad \xi = \xi_0 . e^{\sigma t}, \qquad \eta = \eta_0 . e^{\sigma t}, \qquad \ldots$$

setzt und die Gleichung aufsucht, von welcher σ abhängt. Da die Einführung dieser Werthe wegen der geraden Differentialquotienten durchaus auf gerade Potenzen von σ leitet, so wird auch die resultirende Gleichung

$$(29.)\qquad \Sigma = 0$$

nur gerade Potenzen von σ enthalten können; aber dieselben werden bis zu unendlich hohem Grade ansteigen, und man mufs daher der Gleichung (29.) den Character einer transcendenten beilegen.

Die Gleichung $\Sigma = 0$ stellt sich im Allgemeinen unter der Form einer Determinante der sechsten Ordnung dar. Denn wenn man die Werthe (28.) in die linken Theile von (27.) einführt und dieselben gleich Null setzt, so erhält man Ausdrücke von der Form

$$A\xi_0 + B\eta_0 + C\zeta_0 + D\varphi_0 + E\psi_0 + F\vartheta_0 = 0,$$

in welchen sämmtliche A, B, ... unendlich hohe Potenzen von σ enthalten; die Elimination der Verhältnisse von ξ_0, η_0, ... aus den 6 Gleichungen, welche (27.) ergiebt, führt dann auf die gesuchte Gleichung. Diese Determinantenform zeigt in vielen Fällen die Gleichung $\Sigma = 0$ schon in mehrere Factoren aufgelöst, wovon weiter unten ein Beispiel auftreten wird.

Die Aufstellung dieser transcendenten Gleichung genügt aber vollständig, um die Frage nach der Stabilität des schwimmenden Körpers entscheiden zu lassen. Denn aus den bekannten Sätzen über die Stabilität von Punktsystemen ist die nothwendige und hinreichende Bedingung der Stabilität, dafs keine Wurzel der Gleichung $\Sigma = 0$ existire, deren reeller Theil positiv. Und da in der vorliegenden Gleichung offenbar je zwei Wurzeln einander gleich und entgegengesetzt sind, so darf überhaupt keine Wurzel einen reellen Theil enthalten; denn wenn eine der Wurzeln einen negativen reellen Theil aufwiese, so zeigte die entsprechende einen positiven, was nicht sein darf. So müssen also alle Werthe von σ rein imaginär oder, was dasselbe ist, alle Werthe von σ^2 negativ sein. Man hat somit den Satz:

> ***Das Gleichgewicht des schwimmenden Körpers ist nur (und immer) stabil, wenn sämmtliche für σ^2 aus der Gleichung***
>
> $$\Sigma = f(\sigma^2) = 0$$
>
> ***folgende n Werthe negativ sind. Diese Gleichung hängt nur von der Gestalt und Lage des Körpers, nicht aber von etwaigen Bewegungen ab, welche in der Flüssigkeit selbst ihren Ursprung haben.***

Der Einflufs, den diese letztern auf den Körper ausüben, hängt von der Berücksichtigung der rechten Theile in den Gleichungen (27.) ab, d. h. von der Function Q. Diese mufs sich nach der Bemerkung des §. 3. als periodische Function von t, d. h. in der Form

$$Q = \Sigma(A \sin \varkappa t + B \cos \varkappa t)$$

darstellen, wo die einzelnen Glieder den verschiedenen, die Flüssigkeit durchkreuzenden Wellen entsprechen. Dann aber folgt aus der Theorie der Variation der Constanten, dafs die Berücksichtigung dieser Glieder nur (und immer) in den Ausdrücken der ξ, η, ... auf Terme führt, welche die Zeit aufserhalb des Sinus- oder Cosinuszeichens enthalten, sobald die Periodicität eines Gliedes in $\boldsymbol{Q}$ mit der Periode eines Gliedes von ξ, η, ... übereinstimmt, d. h. wenn ein $\varkappa$ gleich einem der Werthe von $\sqrt{-\sigma^2}$ wird, welche aus $\Sigma = 0$ fliefsen. Und so erhält man das zweite Theorem, welches den störenden Einflufs der in der Flüssigkeit vorhandenen Wellen angiebt:

Jeder stabil schwimmende Körper kann durch unendlich kleine Wellenbewegungen der Flüssigkeit in endliche Bewegungen versetzt werden, sobald die Periode derselben mit einer Periode derjenigen Bewegungen übereinstimmt, welche der Körper für sich anzunehmen bestrebt ist. Die Anzahl dieser Wellenbewegungen ist für jeden Körper unendlich grofs, ebenso wie die Anzahl der periodischen Bewegungen, welche er für sich anzunehmen im Stande ist.

Durch diese beiden Theoreme ist, wie man sieht, die Aufgabe auf die alleinige Aufstellung der Function Σ, d. h. der Functionen $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ etc. zurückgeführt.

§. 5.

Eine andere Art, die Gleichung $\Sigma = 0$ aufzustellen. Ueber den speciellen Fall eines gegen zwei Verticalebenen symmetrischen Körpers.

Die Aufstellung der Gleichungen (28.) führt nun aber auf einen unmittelbareren Weg zur Darstellung der Functionen Σ und $\boldsymbol{P}$. Denn wenn man in $\boldsymbol{P}$ die Terme

$$\boldsymbol{X}_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \boldsymbol{X}_2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^2} + \cdots$$

betrachtet, sodann aber, wie oben geschehen,

$$\xi = \xi_0 e^{\sigma t}, \qquad \eta = \eta_0 e^{\sigma t}, \quad \text{etc.}$$

setzt, so ist dies nichts anderes, als dafs man dem betrachteten Theile der Function $\boldsymbol{P}$ die Gestalt giebt

$$(30.) \qquad (\boldsymbol{X}\xi_0 + \boldsymbol{Y}\eta_0 + \boldsymbol{Z}\zeta_0 + \boldsymbol{\Phi}\varphi_0 + \boldsymbol{\Psi}\psi_0 + \boldsymbol{\Theta}\vartheta_0) e^{\sigma t} = \boldsymbol{\Omega} e^{\sigma t},$$

wo $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ etc. die Zeit nicht mehr enthalten; und statt diese Darstellung durch die Form (25.) anzubahnen, kann man sie jetzt ohne Weiteres aus den Gleichungen (24.) abzuleiten versuchen. In der That, setzt man in diesen Gleichungen

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Omega} e^{\sigma t}$$

und für ξ, η etc. die erwähnten Werthe, so erhält man die Bedingungs-

gleichungen:

$$(31.)\quad \begin{cases} \Omega = 0 \quad \text{(im Unendlichen)}, \\ \sigma^2\Omega = g\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} \quad \text{(an der freien Oberfläche)}, \\ -\dfrac{1}{m\sigma^2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial n} = \xi_0\cos\alpha+\eta_0\cos\beta+\zeta_0\cos\gamma \\ \qquad +\varphi_0((z-z_0)\cos\beta-y\cos\gamma)+\psi_0(x\cos\gamma-(z-z_0)\cos\alpha) \\ \qquad +\vartheta_0(y\cos\alpha-x\cos\beta) \quad \text{(an der Oberfläche des Körpers)}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ist die Function Ω, und zwar in der Form (30.), vollständig bestimmt, sobald man ihr noch die Eigenschaft auferlegt, dafs sie, nach aufsteigenden Potenzen von σ^2 entwickelt, durch jedes einzelne Glied der Entwicklung der Potentialgleichung genüge. Denn dies ist in der That die Bedingung, welche den zweiten Theil der Entwicklung (25.) characterisirt; wie man denn auch leicht (analog den oben geführten Beweisen) zeigen kann, dafs die Differenz zweier Functionen, welche dieser Bedingung und den Gleichungen (31.) genügen mufs, nothwendig verschwindet.

Die Gleichungen (31.) zerfallen aber, mit Anwendung der Form (30.), sogleich in die einzelnen Systeme:

Im Unendlichen:

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= 0, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

An der freien Oberfläche:

$$\begin{aligned} \sigma^2 X &= g\frac{\partial X}{\partial z}, \\ \sigma^2 Y &= g\frac{\partial Y}{\partial z}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

An der Oberfläche des Körpers:

$$(32.)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{m\sigma^2}\dfrac{\partial X}{\partial n} = \cos\alpha, \\ -\dfrac{1}{m\sigma^2}\dfrac{\partial Y}{\partial n} = \cos\beta, \\ -\dfrac{1}{m\sigma^2}\dfrac{\partial Z}{\partial n} = \cos\gamma, \\ -\dfrac{1}{m\sigma^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = (z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma, \\ -\dfrac{1}{m\sigma^2}\dfrac{\partial \Psi}{\partial n} = x\cos\gamma-(z-z_0)\cos\alpha, \\ -\dfrac{1}{m\sigma^2}\dfrac{\partial \Theta}{\partial n} = y\cos\alpha - x\cos\beta. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man also die Functionen X, Y, ... unmittelbar bestimmen Sie genügen aber zugleich, um einige wichtige Eigenschaften erkennen zu lassen, welche auftreten, sobald der schwimmende Körper in seiner Ruhelage symmetrisch wird in Bezug auf zwei gegen einander senkrechte Verticalebenen. In diesem Falle müssen in den allgemeinen Gleichungen (22.), (23.) für die Bewegung des Körpers die Coefficienten

$$a_{12}, \quad a_{23}, \quad a_{31}, \qquad c_1, \quad c_2, \quad c_{12}$$

verschwinden, indem man diese Verticalebenen zu Coordinatenebenen wählt. Zugleich aber vereinfachen sich die Ausdrücke bedeutend, welche von demjenigen Theile des hydrodynamischen Druckes P abhängig sind, welcher die Form $\Omega e^{\sigma t}$ annimmt. Unter den angegebenen Umständen ändert nämlich offenbar $\cos\alpha$ mit x, $\cos\beta$ mit y das Vorzeichen, während $\cos\alpha$ für $+y$ und $-y$ den gleichen Werth behält, ebenso $\cos\beta$ für x und $-y$, $\cos\gamma$ für x und $-x$, und auch für y und $-y$. Setzt man also für $\frac{\partial X}{\partial n}$ etc. in die Gleichungen (32.) ihre Werthe

$$\frac{\partial X}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial X}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial X}{\partial z}\cos\gamma$$

etc.,

so erkennt man, dafs in Bezug auf die oben angegebenen Eigenschaften nothwendig X und Ψ mit $\cos\alpha$, Y und Φ mit $\cos\beta$, Z mit $\cos\gamma$ übereinstimmen müssen, während Θ den Character des Products $\cos\alpha\cos\beta$ oder xy an sich trägt.

Bildet man daher jetzt die sechs Integrale, welche in den Gleichungen (22.), (23.) vorkommen:

$$\int\Omega\cos\alpha\, do, \qquad \int\Omega((z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma)\, do,$$

$$\int\Omega\cos\beta\, do, \qquad \int\Omega(x\cos\gamma - (z-z_0)\cos\alpha)\, do,$$

$$\int\Omega\cos\gamma\, do, \qquad \int\Omega(y\cos\alpha - x\cos\beta)\, do,$$

so erkennt man, dafs wegen der Symmetrie der Figur dieselben sich reduciren auf:

$$\int(\xi_0 X + \psi_0\Psi)\cos\alpha\, do, \qquad \int(\eta_0 Y + \varphi_0\Phi)((z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma)\, do,$$

$$\int(\eta_0 Y + \varphi_0\Phi)\cos\beta\, do, \qquad \int(\xi_0 X + \psi_0\Psi)(x\cos\gamma - (z-z_0)\cos\alpha)\, do,$$

$$\int\zeta_0 Z\cos\gamma\, do, \qquad \int\vartheta_0\Theta(y\cos\alpha - x\cos\beta)\, do,$$

während die Elemente aller übrigen Integrale einander gegenseitig zerstören.

Und so erhält man aus (22.), (23.) folgende Gleichungen, indem man, wie es zur Bestimmung der Gleichung $\Sigma = 0$ geschehen mufs, von der Function Q abstrahirt:

$$(1.)\quad M\sigma^2 \,.\xi_0 = -\xi_0\int X\cos\alpha\, do - \psi_0\int \Psi\cos\alpha\, do,$$

$$(2.)\quad M\sigma^2 \,.\eta_0 = -\eta_0\int Y\cos\beta\, do - \varphi_0\int \Phi\cos\beta\, do,$$

$$(3.)\quad M\sigma^2 \,.\zeta_0 = -\zeta_0\Big(\int Z\cos\gamma\, do + gmF\Big),$$

$$(4.)\quad M\sigma^2 a_{11}.\varphi_0 = -\varphi_0\Big(\int \Phi\,((z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma)\, do + gmF\Big(c_{11}-\frac{z}{F}\Big)\Big) - \eta_0\int Y\,((z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma)\, do,$$

$$(5.)\quad M\sigma^2 a_{22}.\psi_0 = -\psi_0\Big(\int \Psi_0\,(x\cos\gamma - (z-z_0)\cos\alpha)\, do + gmF\Big(c_{22}-\frac{z}{F}\Big)\Big) - \xi_0\int X\,(x\cos\gamma - (z-z)\cos\alpha)\, do,$$

$$(6.)\quad M\sigma^2 a_{33}.\vartheta_0 = -\vartheta_0\int \Theta(y\cos\alpha - x\cos\beta)\, do.$$

Hieraus erkennt man, dafs das frühere System von Gleichungen sich in vier von einander vollständig gesonderte Systeme aufgelöst hat, welche durch die Gleichungen

$$(1.).(5.),\quad (2.).(4.),\quad (3.),\quad (6.)$$

gebildet werden; und dafs also die Gleichung $\Sigma = 0$ sich in vier Factoren auflöst, von denen der erste der Bewegung in der Richtung der X-Axe und der Drehung um die Y-Axe, der zweite der Bewegung in der Richtung der Y-Axe und der Drehung um die X-Axe, der dritte der Bewegung in Richtung der Verticalen, der vierte einer Drehung um dieselbe entspricht. Diese vier Bewegungsarten können somit einzeln behandelt und auch einzeln in Rücksicht auf die Stabilität untersucht werden, indem man der Reihe nach die vier Eliminationsgleichungen discutirt:

$$\Big[\int X\cos\alpha\, do + M\sigma^2\Big]\Big[\int \Psi\,(x\cos\gamma - (z-z_0)\cos\alpha)\, do + M\sigma^2 a_{22} + gmF\Big(c_{22}-\frac{z}{F}\Big)\Big] - \int \Psi\cos\alpha\, do\,.\int X\,(x\cos\gamma - (z-z_0)\cos\alpha)\, do = 0,$$

$$\Big[\int Y\cos\beta\, do + M\sigma^2\Big]\Big[\int \Phi\,((z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma)\, do + M\sigma^2 a_{11} + gmF\Big(c_{11}-\frac{z}{F}\Big)\Big] - \int \Phi\cos\beta\, do\,.\int Y\,((z-z_0)\cos\beta - y\cos\gamma)\, do = 0,$$

$$\int \mathbf{Z} \cos\gamma \, do + M\sigma^2 + gmF = 0,$$

$$\int \Theta (y\cos\alpha - x\cos\beta) \, do + M\sigma^2 a_{33} = 0.$$

Es wird sogar nur nothwendig sein, die ersten beiden Gleichungen zu untersuchen, da der Natur der Sache nach die Bewegung in den letzten beiden Beziehungen nothwendig periodisch sein mufs. Ist der Körper vollends ein Rotationskörper, und die **Z**-Axe seine geometrische Axe, so fallen noch die ersten beiden Gleichungen in eine einzige zusammen.

Carlsruhe, den 5ten August 1859.

Ueber eine symbolische Formel, die sich auf die Zusammensetzung der binären quadratischen Formen bezieht.

(Von Herrn *L. Schläfli* zu Bern.)

Der Beweis, den *Gaufs* (Disquisitiones arithm. p. 352) dafür giebt, dafs die Elemente A, B, C der Form

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

welche durch die Substitution

$$X = \lambda xx' + \lambda' xy' + \lambda'' yx' + \lambda''' yy',$$
$$Y = \mu xx' + \mu' xy' + \mu'' yx' + \mu''' yy'$$

in das Product der Formen

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$
$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

übergeht, aus seinem Verfahren die Substitutionselemente λ, μ, ... zu bestimmen, als ganze Zahlen hervorgehen, schliefst eine merkwürdige symbolische Formel in sich, welche verallgemeinert werden kann.

Da die sechs Determinanten $(\lambda\mu')$, ... der Substitutionselemente 1 zum gröfsten gemeinschaftlichen Maafs haben, so kann man sechs ganze Zahlen finden, welche einzeln mit den Determinanten multiplicirt sechs Producte geben, deren Summe 1 ist. Der Ausdruck, dessen Werth 1 ist, als lineare und homogene Function von λ, ... aufgefafst, sei $\alpha\lambda + \alpha'\lambda' + \alpha''\lambda'' + \alpha'''\lambda'''$, in derselben Beziehung zu μ, ... sei er $\beta\mu + \beta'\mu' + \beta''\mu'' + \beta'''\mu'''$. Dann kennt man acht ganze Zahlen α, β, ..., welche die Bedingungen

$$\Sigma\alpha\lambda = 1, \quad \Sigma\alpha\mu = 0, \quad \Sigma\beta\lambda = 0, \quad \Sigma\beta\mu = 1$$

erfüllen. Daraus folgt:

$$\lambda = \begin{vmatrix} \lambda, & \Sigma\beta\lambda \\ \mu, & \Sigma\beta\mu \end{vmatrix} = \beta'(\lambda\mu') + \beta''(\lambda\mu'') + \beta'''(\lambda\mu'''); \quad \text{etc.}$$

$$\mu = -\alpha'(\lambda\mu') - \alpha''(\lambda\mu'') - \alpha'''(\lambda\mu'''), \quad \text{etc.}$$

wo nun

$$(\lambda\mu') = n'a, \qquad (\lambda\mu'') = na',$$
$$(\lambda\mu''') = nb' + n'b, \qquad (\lambda'\mu'') = nb' - n'b,$$
$$(\lambda'\mu''') = nc', \qquad (\lambda''\mu''') = n'c$$

zu setzen ist, wenn wir die Discriminanten der drei Formen mit

$$\begin{aligned} D &= AC - B^2, \\ n^2D &= ac - b^2, \\ n'^2D &= a'c' - b'^2 \end{aligned}$$

bezeichnen.

Setzen wir jetzt

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \upsilon = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi' = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \upsilon' = \frac{\partial}{\partial y'},$$

$\varphi = \alpha\xi\xi' + \alpha'\xi\upsilon' + \alpha''\upsilon\xi' + \alpha'''\upsilon\upsilon'$, $\psi = \beta\xi\xi' + \beta'\xi\upsilon' + \beta''\upsilon\xi' + \beta'''\upsilon\upsilon'$, $\Phi = X\varphi + Y\psi$,

unterscheiden die Variabeln als Objecte der Differentiationssymbole durch einen übergesetzten Strich von ihren als constant geltenden Werthen, die wir durch dieselben Buchstaben ohne diesen Strich ausdrücken, und machen der Kürze wegen

$$r = \tfrac{1}{2}(x\xi + y\upsilon)\overline{f} = p\overline{x} + q\overline{y}, \qquad s = y\overline{x} - x\overline{y},$$

so haben wir

$$X = -\psi(nsr' + n'rs'), \qquad Y = \varphi(nsr' + n'rs');$$

die Bedingung $\Sigma\alpha\lambda = 1$ bekommt die Gestalt

$$\tfrac{1}{2}n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\upsilon} - \frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\overline{f'} + \tfrac{1}{2}n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}\frac{\partial\psi}{\partial\upsilon'} - \frac{\partial\varphi}{\partial\upsilon'}\frac{\partial\psi}{\partial\xi'}\right)\overline{f} = 1$$

und fällt mit $\Sigma\beta\mu = 1$ zusammen, während $\Sigma\alpha\mu = 0$, $\Sigma\beta\lambda = 0$ schon durch die Ausdrücke für $\lambda, \mu, \ldots$ realisirt sind; und die von *Gaufs* zum Beweise, dafs A, B, C ganze Zahlen sind, gebrauchte Gleichung erscheint unter der merkwürdigen Form

$$F = \tfrac{1}{4}\Phi^2\overline{ff'} - 2nn'D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\xi'}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\upsilon\partial\upsilon'} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\upsilon'}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\upsilon\partial\xi'}\right).$$

Dafs ähnliche Gleichungen für eine Zusammensetzung aus beliebig vielen quadratischen Formen existiren, deren Discriminanten sich wie die Quadrate ganzer Zahlen verhalten, wird schon hinreichend klar werden, wenn wir $F = ff'f''$ betrachten. Die Discriminanten der vier Formen seien D, n^2D, n'^2D, n''^2D, und da wir die irrationalen linearen Factoren der Formen brauchen, so setzen wir $D = -R^2$,

$$t = ax + (b - nR)y, \qquad \xi = a\tau + \varepsilon, \qquad \tau = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$u = x + \frac{b+nR}{a}y, \qquad \upsilon = (b - nR)\tau + \frac{b+nR}{a}\varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{\partial}{\partial u},$$

und haben dann $f = tu$, $f' = t'u'$, $f'' = t''u''$. Da auch $F = TU$ werden

soll, wo

$$T = AX + (B - R)Y, \qquad U = X + \frac{B+R}{A}Y,$$

so lassen wir T, U sich respective von $tt't''$, $uu'u''$ nur durch constante Factoren unterscheiden. Die Symbole φ, ψ, $\Phi = X\varphi + Y\psi$ mögen ähnliche Bedeutung haben, wie oben, nur mit dem Unterschiede, dafs sie jetzt dreischichtig linear sind in Bezug auf ξ, v, auf ξ', v' und auf ξ'', v''. Wir denken uns aber vor der Hand diese Symbole in Function von τ, ϑ; τ', ϑ'; τ'', ϑ'' darin substituirt und schreiben daher $\varphi = \varphi_{000}\tau\tau'\tau'' + \varphi_{001}\tau\tau'\vartheta'' + \cdots + \varphi_{111}\vartheta\vartheta'\vartheta''$ und ebenso hinsichtlich ψ, Φ. Damit F als binäres Product erscheine, setzen wir $F = \frac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}(tt't''\overline{uu'u''} + uu'u''\overline{tt't''})$, wo der Strich über dem zweiten Φ bedeutet, dafs die zuerst als constant behandelten t, u, ... nach dem vollzogenen zweiten Φ überstrichen, d. h. als Differentiationsobject des ersten Φ aufgefafst werden sollen. Es folgt dann $F = \Phi_{000}\Phi_{111}$; folglich $A = \varphi_{000}\varphi_{111}$, $2B = \varphi_{000}\psi_{111} + \varphi_{111}\psi_{000}$, $C = \psi_{000}\psi_{111}$; also

$$2R = \varphi_{000}\psi_{111} - \varphi_{111}\psi_{000} = \varphi\overline{\psi}(tt't''\overline{uu'u''} - uu'u''\overline{tt't''});$$

dafs hier das Vorzeichen richtig gewählt ist, wird sich sogleich zeigen. Da $X = \Sigma\lambda xx'x''$, $\varphi = \Sigma\alpha\xi\xi'\xi''$, so ist $\varphi X = \Sigma\alpha\lambda$ und mufs $= 1$ sein. Der vorige Ausdruck für $2R$ giebt uns also $2RX = \psi(tt't''\overline{uu'u''} - uu'u''\overline{tt't''})$, d. h. $2RX = \psi_{111}tt't'' - \psi_{000}uu'u''$, $2RY = -\varphi_{111}tt't'' + \varphi_{000}uu'u''$, woraus $\Phi_{000} = tt't''$, $\Phi_{111} = uu'u''$ folgt. Die Werthe für A, B, R in den Ausdrücken für T, U substituirt, geben $T = \varphi_{111}\Phi_{000}$, $U = \frac{\Phi_{111}}{\varphi_{111}}$, also $T = \varphi_{111}tt't''$, $U = \frac{uu'u''}{\varphi_{111}}$, wie wir verlangt haben. Hätten wir hingegen vorhin

$$-2R = \varphi_{000}\psi_{111} - \varphi_{111}\psi_{000}$$

angenommen, so würden wir

$$T = \varphi_{000}\Phi_{111} = \varphi_{000}uu'u''$$

bekommen haben.

Wenn, wie oben, $r = (ax + by)\overline{x} + (bx + cy)\overline{y}$, $s = y\overline{x} - x\overline{y}$ gesetzt wird, so ist $t\overline{u} = r - nRs$, $u\overline{t} = r + nRs$, daher

$$\tfrac{1}{2}(tt't''\overline{uu'u''} + uu'u''\overline{tt't''}) = rr'r'' - n'n''Drs's'' - nn''Dsr's'' - nn'Dss'r'',$$

$$-\frac{1}{2R}(tt't''\overline{uu'u''} - uu'u''\overline{tt't''}) = nsr'r'' + n'rs'r'' + n''rr's'' - nn'n''Dss's''.$$

Mittelst dieser zwei Relationen sind nun die Ausdrücke für F, $2RX$, $2R$ so zu verwandeln, dafs φ, ψ als explicite Functionen von ξ, v; etc. zur Anwendung kommen.

Um die abgeleiteten Functionen im Folgenden kürzer bezeichnen zu können, setze ich z. B.

$$\varphi = \varphi_{0..}\xi + \varphi_{1..}v = \varphi_{.0.}\xi' + \varphi_{.1.}v' = \varphi_{..0}\xi'' + \varphi_{..1}v'',$$
$$\varphi_{0..} = \varphi_{00.}\xi' + \varphi_{01.}v' = \varphi_{0.0}\xi'' + \varphi_{0.1}v'',$$
$$\varphi_{00.} = \varphi_{000}\xi'' + \varphi_{001}v'', \quad \text{u. s. f.}$$

Man verwechsele nicht diese auf ξ, v, ... bezüglichen Zeiger mit den früher gebrauchten, die sich auf τ, ϑ, ... bezogen, und die wir nicht mehr anwenden werden. — Da $\Phi(\boldsymbol{r})$ dasselbe ist, wie wenn ξ, v in Φ respective durch $\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{by}$, $\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{cy}$ ersetzt werden, also gleich $\frac{1}{2}\Phi\overline{f}$, so sieht man, dafs $\Phi\overline{\Phi}(\boldsymbol{rr'r''}) = \frac{1}{8}\Phi^2\overline{ff'f''}$ ist. Da ferner

$$\Phi\overline{\Phi}(\boldsymbol{ry'y''}\overline{\boldsymbol{x'x''}}) = \tfrac{1}{2}(\Phi\overline{\boldsymbol{y'y''}}\times\Phi\overline{\boldsymbol{x'x''}})\overline{f} = \tfrac{1}{2}\Phi_{.00}\Phi_{.11}\overline{f} = \Phi\overline{\Phi}(\boldsymbol{rx'x''}\overline{\boldsymbol{y'y''}}),$$

etc. ist, so folgt

$$\Phi\overline{\Phi}(\boldsymbol{rs's''}) = (\Phi_{.00}\Phi_{.11} - \Phi_{.01}\Phi_{.10})\overline{f}.$$

Wenn man $\boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial v} - \boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial\xi} = \delta$, etc. setzt, so ist

$$-\psi(\boldsymbol{sr'r''}) = \tfrac{1}{4}\delta\psi\overline{f'f''} = \tfrac{1}{4}(\boldsymbol{x}\psi_{1..} - \boldsymbol{y}\psi_{0..})\overline{f'f''},$$
$$-\psi(\boldsymbol{ss's''}) = \delta\delta'\delta''\psi = \psi_{111}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x'x''} - \psi_{110}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x'y''} - \text{etc.} - \psi_{000}\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{y'y''};$$

folglich

$$-\varphi\overline{\psi}(\boldsymbol{sr'r''}) = \tfrac{1}{4}(\varphi_{0..}\psi_{1..} - \varphi_{1..}\psi_{0..})\overline{f'f''},$$
$$-\varphi\overline{\psi}(\boldsymbol{ss's''}) = \varphi_{000}\psi_{111} - \varphi_{001}\psi_{110} - \text{etc.} - \varphi_{111}\psi_{000}.$$

Wir gelangen so zu folgendem System, das die vollständige Lösung der Aufgabe, drei Formen zusammenzusetzen, enthält:

Wenn die sechszehn Coefficienten φ_{000}, φ_{001}, ... φ_{111}, ψ_{000}, ... in den symbolischen Functionen φ, ψ ganze Zahlen sind, die der einzigen Bedingung

$$\tfrac{1}{4}\boldsymbol{n}(\varphi_{0..}\psi_{1..} - \varphi_{1..}\psi_{0..})\overline{f'f''} + \tfrac{1}{4}\boldsymbol{n'}(\varphi_{.0.}\psi_{.1} - \varphi_{.1.}\psi_{.0})\overline{ff''} + \tfrac{1}{4}\boldsymbol{n''}(\varphi_{..0}\psi_{..1} - \varphi_{..1}\psi_{..0})\overline{ff'}$$
$$-\boldsymbol{nn'n''D}(\varphi_{000}\psi_{111} - \varphi_{100}\psi_{011} - \varphi_{010}\psi_{101} - \varphi_{001}\psi_{110} + \varphi_{011}\psi_{100} + \varphi_{101}\psi_{010}$$
$$+\varphi_{110}\psi_{001} - \varphi_{111}\psi_{000}) = 1$$

genügen, und man setzt $\Phi = \boldsymbol{X}\varphi + \boldsymbol{Y}\psi$, so geht die quadratische Form

$$\boldsymbol{F} = \tfrac{1}{8}\Phi^2\overline{ff'f''} - \boldsymbol{n'n''D}(\Phi_{.00}\Phi_{.11} - \Phi_{.01}\Phi_{.10})\overline{f'f''} - \boldsymbol{nn''D}(\Phi_{0.0}\Phi_{1.1} - \Phi_{0.1}\Phi_{1.0})\overline{ff''}$$
$$- \boldsymbol{nn'D}(\Phi_{00.}\Phi_{11.} - \Phi_{01.}\Phi_{10.})\overline{ff'}$$

durch die Substitution

$$X = \tfrac{1}{4}n(x\psi_{1..} - y\psi_{0..})\overline{f'f''} + \tfrac{1}{4}n'(x'\psi_{.1.} - y'\psi_{.0.})\overline{ff''} + \tfrac{1}{4}n''(x''\psi_{..1} - y''\psi_{..0})\overline{ff'}$$
$$-nn'n''D(\psi_{111}xx'x'' - \psi_{110}xx'y'' - \psi_{101}xy'x'' + \psi_{100}xy'y'' - \psi_{011}yx'x'' + \psi_{010}yx'y''$$
$$+\psi_{001}yy'x'' - \psi_{000}yy'y'),$$

$Y =$ einem ähnlichen Ausdruck, worin $-\varphi$ anstatt ψ steht,

in $ff'f''$ über. — Bezeichnet z. B. λ_{000} den Coefficienten von $xx'x''$ in der Entwicklung von X, so hat man

$$\lambda_{000} = \tfrac{1}{4}n\xi'\xi''\psi_{1..}\overline{f'f''} + \tfrac{1}{4}n'\xi\xi''\psi_{.1.}\overline{ff''} + \tfrac{1}{4}n''\xi\xi'\psi_{..1}\overline{ff'} - nn'n''D\psi_{111},$$
$$\lambda_{001} = \tfrac{1}{4}n\xi'v''\psi_{1..}\overline{f'f''} + \tfrac{1}{4}n'\xi v''\psi_{.1.}\overline{ff''} - \tfrac{1}{4}n''\xi v'\psi_{..0}\overline{ff'} + nn'n''D\psi_{110}, \quad \text{etc.}$$

Hieraus sind die Werthe der Determinanten der Substitutionselemente λ, μ, ... zu entnehmen. Z. B. $(\lambda_{000}, \mu_{001})$ ist im Ausdruck für λ_{000} der Coefficient von ψ_{001}, also $\tfrac{1}{4}n''\xi^2\xi'^2\overline{ff'} = n''aa'$; $(\lambda_{000}, \mu_{011})$ ist ebendaselbst der Coefficient von ψ_{011}, also $\tfrac{1}{4}n'\xi^2\xi''v''\overline{ff''} + \tfrac{1}{4}n''\xi^2\xi'v'\overline{ff'} = a(n'b'' + n''b')$; so auch

$$(\lambda_{000}, \mu_{111}) = nb'b'' + n'bb'' + n''bb' - nn'n''D, \quad \text{u. s. f.}$$

Geht man von den bekannten Werthen dieser Determinanten aus, von denen man leicht zeigen kann, dafs sie ganze Zahlen sind, die 1 zum gröfsten gemeinschaftlichen Maafs haben, so kann man nach der Methode von *Gaufs* λ, μ bestimmen und erst dann, wie zu Anfang dieses Aufsatzes gesagt wurde, die Functionen φ, ψ, so dafs sie jener einzigen Bedingung genügen.

Dafs der hier eingeschlagene Weg für jede beliebige Anzahl zusammenzusetzender Formen befolgt werden kann, ist wohl klar genug.

Bern, im Sommer 1859.

Neue Eigenschaften der linearen Substitutionen, welche gegebene homogene Functionen des zweiten Grades in andere transformiren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten.

(Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg.)

Durch eine Reihe sehr scharfsinniger Schlüsse ist es ***Kummer*** gelungen, den analytischen Ausdruck, welcher das Quadrat des Productes der Differenzen der Wurzeln der kubischen Gleichung darstellt, von welcher das Problem der Hauptaxen einer Oberfläche zweiter Ordnung abhängt, in die Summe von Quadraten zu zerlegen (Bd. 26, p. 268 dieses Journals). Zu demselben Resultat und zugleich zu einer Ausdehnung desselben im Falle der Gleichung *n*ten Grades, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten findet, gelangt ***Borchardt*** durch eine sehr geschickte Behandlung der Determinanten (Bd. 30, p. 38), nachdem ***Jacobi*** im ***Giornale Arcadico,*** Tom. 48 durch ein System bis dahin noch ganz unbekannter Formeln das ***Kummer***sche Resultat hergeleitet hatte (Bd. 30, p. 46). Ein besonderes Gewicht ist zu legen auf die Formel, welche aus ***Jacobi***s letzter hervorgeht, indem man die von ihm angegebenen Werthe derjenigen Gröfsen substituirt, aus welchen sie besteht. Dadurch erhält man die Einheit ausgedrückt durch eine Summe von Quadraten von Functionen der Coefficienten in den Substitutionen, welche allein zur Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem dienen. Diese Formel erfreut sich einer gewissen Analogie mit der ***Kummer***schen und die eine geht mit Hülfe der ***Jabobi***schen Formeln in die andere über. Die kunstlose Entwickelung dieser ***Jacobi***schen Formeln mit ihren Erweiterungen zur Verificirung der ***Borchardt***schen Entdeckung ist der Zweck dieser Note.

Wenn die n Variabeln $X_1, X_2, \ldots X_n$ mit den n Veriabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die n linearen Gleichungen:

$$(1.) \qquad X_\varkappa = a_1^{(\varkappa)}x_1 + a_2^{(\varkappa)}x_2 + \ldots + a_n^{(\varkappa)}x_n,$$

in welchen $\varkappa$ die Bedeutung der Zahlen hat $1, 2, \ldots n,$ verbunden sind; und

wenn diese Substitutionen die Summe der Quadrate der ersten Variabeln X transformiren in die Summe der Quadrate der anderen Variabeln x, so hat man bekanntlich:

$$(2.) \quad x_z = a'_z X_1 + a''_z X_2 + \cdots + a^{(n)}_z X_n.$$

Entwickelt man unter dieser Voraussetzung das Product sämmtlicher Variabeln der ersten Gattung nach Potenzen und Producten der anderen Variabeln, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$(3.) \quad X_1 X_2 \ldots X_n = \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} . x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

in welcher Gleichung die Coefficienten A ganze rationale Functionen der Coefficienten a der Substitutionen bedeuten, und die Exponenten α irgend welche von den Zahlen 0, 1, ... n unter der Beschränkung, dafs

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n.$$

Setzt man in dem Product $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ für die Variabeln x die Werthe (2.) und entwickelt nach Potenzen und Producten der Variabeln X, so wird der Coefficient des Productes $X_1 X_2 \ldots X_n$, abgesehen von einem Zahlencoefficienten, gleich $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$. Bezeichnet man demnach diesen Zahlencoefficienten mit $C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$, und entwickelt den ganzen zweiten Theil der Gleichung (3.) nach Potenzen und Producten der Variabeln X, so folgt aus dem Vergleich des Coefficienten von $X_1 X_2 \ldots X_n$ des rechten und linken Theiles der genannten Gleichung die merkwürdige Relation:

$$(4.) \quad 1 = \Sigma C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} . A^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Die angegebenen Bedingungen, unter welchen diese Relation besteht, fasse ich zusammen in dem

Lehrsatz:

Wenn die Substitutionen (1.) *die Summe der Quadrate der Variabeln X in die Summe der Quadrate der Variabeln x transformiren und wenn* (3.) *die Entwickelung des Products sämmtlicher Variabeln X nach Potenzen und Producten der Variabeln x darstellt, so findet zwischen den Coefficienten A dieser Entwickelung die Gleichung* (4.) *Statt.*

Die Substitutionen (1.), oder die umgekehrten (2.) haben die Eigenschaft, die Gleichung

$$(5.) \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

zu einer identischen zu machen. Es werde aber zweitens und im Folgenden

vorausgesetzt, dafs sie überdies eine gegebene rationale homogene Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ des zweiten Grades der Variabeln x transformiren in die Form:

$$(6.) \quad f(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1 X_1^2 + g_2 X_2^2 + \cdots + g_n X_n^2.$$

Unter diesen Voraussetzungen sind die n Gröfsen g als die n Wurzeln der bekannten Gleichung $I' = 0$ gegeben, welche als das Resultat der Elimination der Variabeln aus folgenden linearen Gleichungen hervorgeht:

$$\tfrac{1}{2}f'(x_1) - gx_1 = 0, \quad \tfrac{1}{2}f'(x_2) - gx_2 = 0, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}f'(x_n) - gx_n = 0.$$

Denkt man sich nun diese Wurzelwerthe g eingesetzt in die Gleichung (6.), so wird dieselbe durch die Substitutionen (1.) eine identische, welche sich demnach auch nach einer der darin vorkommenden Variabeln x_z differentiiren läfst. Durch diese Differentiation und Division durch 2 erhält man:

$$(7.) \quad \tfrac{1}{2}f'(x_z) = a'_z g_1 X_1 + a''_z g_2 X_2 + \cdots + a_z^{(n)} g_n X_n,$$

eine Gleichung, welche ein ganzes System von n Gleichungen repräsentirt, gleich wie die Gleichung (2.), da z die Werthe annimmt 1, 2, ... n. Aus dem Vergleich dieser beiden Systeme von Gleichungen ergiebt sich nun, dafs es erlaubt ist, sämmtliche variabeln Gröfsen X_λ zu verändern in die entsprechenden $g_\lambda X_\lambda$, wenn man gleichzeitig alle Variabeln x_z verändert in $\frac{1}{2}f'(x_z)$. Denn das eine System (2.) geht in das andere (7.) dadurch über. Aber nicht allein in den Substitutionen (1.) und (2.) sind diese Aenderungen erlaubt, sondern auch in den Gleichungen (5.) und (6.), welchen der Annahme nach die Substitutionen genügen, oder welche, um mich anders auszudrücken, eine Folge sind der definirten Substitutionen. Durch diese erlaubten Aenderungen leitet ***Jacobi*** aus den Gleichungen (5.) und (6.) folgende her:

$$(\tfrac{1}{2}f'(x_1))^2 + (\tfrac{1}{2}f'(x_2))^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2}f'(x_n))^2 = g_1^2 X_1^2 + g_2^2 X_2^2 + \cdots + g_n^2 X_n^2,$$

$$f(\tfrac{1}{2}f'(x_1), \tfrac{1}{2}f'(x_2), \ldots \tfrac{1}{2}f'(x_n)) = g_1^3 X_1^2 + g_2^3 X_2^2 + \cdots + g_n^3 X_n^2,$$

welche, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$(8.) \quad f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = (\tfrac{1}{2}f'(x_1))^2 + (\tfrac{1}{2}f'(x_2))^2 + \cdots + (\tfrac{1}{2}f'(x_n))^2,$$

$$(9.) \quad f_3(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(\tfrac{1}{2}f'(x_1), \tfrac{1}{2}f'(x_2), \ldots \tfrac{1}{2}f'(x_n)),$$

übergehen in:

$$(10.) \quad f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1^2 X_1^2 + g_2^2 X_2^2 + \cdots + g_n^2 X_n^2,$$

$$(11.) \quad f_3(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1^3 X_1^2 + g_2^3 X_2^2 + \cdots + g_n^3 X_n^2.$$

Auch diese Gleichungen lassen sich als eine Folge der definirten Substitutionen betrachten, in denen ebenfalls die genannten Aenderungen erlaubt

sind. Macht man auch in ihnen und in ihren abgeleiteten die genannten Aenderungen, so gelangt man nach ***Jacobi*** (Bd. 12, p. 12) schliefslich zu einer Gleichung:

$$(12.) \quad f_p(x_1, x_2, \ldots x_n) = g_1^p X_1^2 + g_2^p X_2^2 + \cdots + g_n^p X_n^2,$$

in welcher p irgend eine ganze positive gerade oder ungerade Zahl bedeutet, und $f_p(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Function des zweiten Grades der Variabeln x, deren Coefficienten als ganze rationale Functionen componirt sind aus den Coefficienten in der ursprünglichen Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Differentiirt man diese durch die Substitutionen identische Gleichung partiell nach $x_\varkappa$ und dividirt durch 2, so erhält man:

$$(13.) \quad \tfrac{1}{2} f_p'(x_\varkappa) = a_\varkappa' g_1^p X_1 + a_\varkappa'' g_2^p X_2 + \cdots + a_\varkappa^{(n)} g_n^p X_n.$$

Man bilde nun aus den im Vorhergehenden definirten Functionen die Determinante:

$$(14.) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \frac{1}{2} f'(x_1) & \frac{1}{2} f'(x_2) & \ldots & \frac{1}{2} f'(x_n) \\ \frac{1}{2} f_2'(x_1) & \frac{1}{2} f_2'(x_2) & \ldots & \frac{1}{2} f_2'(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2} f_{n-1}'(x_1) & \frac{1}{2} f_{n-1}'(x_2) & \ldots & \frac{1}{2} f_{n-1}'(x_n) \end{vmatrix}.$$

Sie ist eine homogene ganze rationale Function des $n$ten Grades der in ihr enthaltenen Variabeln. Sie ist auch eine ganze rationale Function vom Grade $n\frac{(n-1)}{2}$ in Rücksicht auf die Coefficienten in der gegebenen Function. Aufser diesen Gröfsen enthält sie keine, die der Veränderung unterworfen werden können.

Setzt man in dieser Determinante für die erste Horizontalreihe der Componenten die Werthe (2.), für die zweite die Werthe (7.) und für die folgenden die Werthe (13.), so sieht man sogleich, dafs dieselbe in das Product zweier Determinanten zerfällt. Der eine Factor ist:

$$\Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)} = \pm 1.$$

Von der Gültigkeit dieser bekannten Gleichung überzeugt man sich leicht dadurch, dafs man die Determinante, welche den linken Theil der Gleichung bildet, mit ihr selber multiplicirt und aus dem Product eine neue Determinante bildet, deren Werth gleich $+1$ wird. Was den zweiten Factor anbetrifft:

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ g_1 X_1 & g_2 X_2 & \dots & g_n X_n \\ g_1^2 X_1 & g_2^2 X_2 & \dots & g_n^2 X_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1^{n-1} X_1 & g_2^{n-1} X_2 & \dots & g_n^{n-1} X_n \end{vmatrix},$$

so zerfällt dieser wieder in das Product sämmtlicher X und einer Determinante, welche, wie bekannt, gleich ist dem Product G der Differenzen sämmtlicher g. Setzt man daher:

$$(15.) \qquad G = (g_1 - g_2)(g_1 - g_3) \dots (g_{n-1} - g_n),$$

so hat man folgenden

Lehrsatz:

Wenn die Substitutionen $x_\varkappa = a'_\varkappa X_1 + a''_\varkappa X_1 + \dots + a^{(n)}_\varkappa X_n$ ***die Summe der Quadrate*** $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ***transformiren in*** $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ ***und aufserdem die beliebig gegebene homogene Function des zweiten Grades*** $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ ***in*** $g_1 X_1^2 + g_2 X_2^2 + \dots + g_n X_n^2$***; so transformiren dieselben Substitutionen auch die in*** (14.) ***definirte Function*** Δ ***des*** n^{ten} ***Grades in*** $\pm G . X_1 . X_2 \dots X_n$ *).

Man hat hiernach das Product sämmtlicher Variabeln X in folgender zweiten Darstellung:

$$(16.) \qquad X_1 X_2 \dots X_n = \pm \frac{1}{G} \cdot \Delta.$$

Entwickelt man aber die Function Δ nach Potenzen und Producten der Variabeln x, indem man setzt:

$$(17.) \qquad \Delta = \Sigma B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

so haben in dieser Entwickelung die Coefficienten B die Bedeutung von ganzen rationalen Functionen, die sich allein aus den Coefficienten der gegebenen Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ zusammensetzen.

Aus dem Vergleich dieser Gleichung (16.) mit (3.) ergeben sich nun die erweiterten ***Jacobi***schen Formeln:

$$(18.) \qquad A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \pm \frac{1}{G} B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n},$$

welche besagen, dafs gewisse ganze rationale Functionen der Coefficienten in den Substitutionen, welche (5.) und (6.) identisch genügen, multiplicirt mit dem in (15.) definirten G, sich darstellen lassen als ganze rationale Functionen der Coefficienten in der Function $f(x_1, x_2, \dots x_n)$.

---

*) Die Priorität dieses Satzes für $n = 3$ kommt *Weierstrafs* zu.

Setzt man endlich diese Werthe von A in die Gleichung (4.), so erhält man das *Borchardt*sche Resultat:

$$(19.) \qquad G^2 = \Sigma C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \cdot B^2_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

in einer allerdings etwas anderen Form.

Der erste oben angegebene Lehrsatz läfst sich noch erweitern in der Voraussetzung, dafs die linearen Substitutionen einer weniger beschränkten Bedingung unterworfen sind. Indem ich auf diese Erweiterung näher eingehe, beabsichtige ich zugleich die Werthbestimmung des Zahlencoefficienten C in der vorhergegangenen Untersuchung hier wieder aufzunehmen und einen möglichen Anstofs in der Entwickelung des genannten Lehrsatzes nachträglich zu beseitigen.

Es liege irgend ein System linearer Gleichungen vor von der Form:

$$(20.) \qquad X_\varkappa = a_1^{(\varkappa)} x_1 + a_2^{(\varkappa)} x_2 + \dots + a_n^{(\varkappa)} x_n.$$

Durch Auflösung dieses Systems nach den Variabeln x erhält man ein System von Gleichungen von der Form:

$$(21.) \qquad x_\varkappa = e'_\varkappa X_1 + e''_\varkappa X_2 + \dots + e_\varkappa^{(n)} X_n.$$

Bildet man mit Berücksichtigung dieser neuen Coefficienten e das System linearer Gleichungen:

$$(22.) \qquad Y_\varkappa = e_1^{(\varkappa)} y_1 + e_2^{(\varkappa)} y_2 + \dots + e_n^{(\varkappa)} y_n,$$

so weifs man nicht allein, dafs die Auflösungen dieser Gleichungen nach den Variabeln y folgende sind:

$$(23.) \qquad y_\varkappa = a'_\varkappa Y_1 + a''_\varkappa Y_2 + \dots + a_\varkappa^{(n)} Y_n,$$

sondern dafs die Substitutionen (20.) bis (23.) auch die Gleichung

$$(24.) \qquad X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

zu einer identischen machen.

Diese Gleichung bleibt auch eine durch die genannten Substitutionen identische, wenn man sowohl ihren rechten als ihren linken Theil zur $n$ten Potenz erhebt. Dadurch erhält man mit Anwendung des polynomischen Lehrsatzes und Unterdrückung des gleichen Factors $\Pi(n) = 1.2 \dots n$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$(25.) \qquad \Sigma \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n} Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \dots Y_n^{\alpha_n}$$

$$= \Sigma \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n},$$

wo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n$$

und:

$$(26.) \quad C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \Pi(\alpha_1)\Pi(\alpha_2)\ldots\Pi(\alpha_n).$$

Bezeichnet man nun in der Entwickelung des Products $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}$ nach den Variabeln Y den Coefficienten von $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ mit

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$$

und eben so in der Entwickelung des Productes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ nach den Variabeln X den Coefficienten von $X_1 X_2 \ldots X_n$ mit

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

so erhält man aus (25.), wenn man diese Gleichung nach den Variabeln Y entwickelt und in der Entwickelung die Coefficienten des Productes $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich setzt,

$$(27.) \quad X_1 X_2 \ldots X_n = \Sigma A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus derselben Gleichung durch Entwickelung nach den Variabeln X

$$(28.) \quad Y_1 Y_2 \ldots Y_n = \Sigma E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}.$$

Hiernach ist es erlaubt die angegebenen Definitionen der Gröfsen A und E aufzugeben und sie Statt dessen als die Entwickelungscoefficienten der Producte (27.) und (28.) aufzufassen; wobei zu bemerken ist, dafs die Gröfsen E ganz dieselben Functionen der Substitutionscoefficienten e, wie die Gröfsen A von a sind. Behält man aber die erste Definition der Gröfsen A und E bei, und entwickelt die Gleichung (25.) nach Potenzen und Producten der Variabeln X und Y, so erhält man durch Gleichstellung der Coefficienten des Productes $X_1 X_2 \ldots X_n . Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ auf beiden Seiten der Gleichung

$$(29.) \quad 1 = \Sigma C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \cdot E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}.$$

Dieses Resultat fasse ich zusammen wie folgt:

Lehrsatz.

Wenn die in (20.) ***bis*** (23.) ***gebildeten linearen Substitutionen die Producte der Variabeln X und die Producte der Variabeln***

Y transformiren in* (27.) *und* (28.), *so findet unter der Voraussetzung von* (26.) *zwischen den Coefficienten in diesen Transformationen die Gleichung* (29.) *Statt.

Da die Gröfsen E in die entsprechenden A übergehen, wenn die Substitutionscoefficienten e mit den entsprechenden a gleich werden, wodurch auch die Substitutionen (20.) bis (23.) mit (1.) und (2.) zusammenfallen, so geht auch (29.) in (4.) über. Der erste Lehrsatz ergiebt sich hiernach als ein Corollar dieses letzten.

Heidelberg, im October 1859.

Vergleichung zweier Formen der Eliminations-Resultante.

(Von *C. W. Borchardt.*)

Bei Gelegenheit einer Besprechung des vortrefflichen *Baltzer*schen Buches über Determinanten *) hat ***Hesse*** in der kritischen Zeitschrift für Mathematik (Jahrgang 1858 S. 483) es als wünschenswerth bezeichnet, durch directe Transformation die Identität der beiden Formen nachzuweisen, unter welchen die Resultante der Elimination zwischen zwei Gleichungen erscheint, wenn sie einerseits nach der ersten *Euler*schen Methode (1748) durch die Wurzeln beider Gleichungen als Differenzenproduct ausgedrückt wird, und wenn sie andrerseits nach der zweiten *Euler*schen (1764) oder *Bezout*schen Methode in die Form einer Determinante gebracht wird, deren Elemente die Coefficienten der beiden Gleichungen sind. Nachdem ***Hesse*** an dem genannten Ort ein Verfahren bekannt gemacht hat, diese directe Transformation zu bewerkstelligen, soll in nachstehender Mittheilung ein von jenem verschiedenes Verfahren angegeben werden, welches darauf beruht, dafs das in der ersten *Euler*schen Methode vorkommende Differenzenproduct sich als Quotient darstellen läfst, dessen Zähler und Nenner aus alternirenden Differenzenproducten bestehen.

Es sei

$$fx = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 = a_m (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m),$$
$$\varphi x = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 = b_n (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n),$$

so wird die Eliminations-Resultante R der Gleichungen $fx=0$, $\varphi x=0$ nach der ***ersten Euler***schen Methode folgendermafsen gefunden. Man bildet das Differenzenproduct

$$P = \prod_{i=1}^{i=m} \prod_{k=1}^{k=n} (\beta_k - \alpha_i),$$

so ist

$$R = a_m^n b_n^m . P,$$

---

*) *R. Baltzer,* Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig, 1857.

was sich auch unter die beiden Formen bringen läfst:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= (-1)^{mn} a_m^n \varphi\alpha_1 \varphi\alpha_2 \ldots \varphi\alpha_m \\ &= b_n^m f\beta_1 f\beta_2 \ldots f\beta_n. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun mit $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ das alternirende Differenzenproduct der Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, jede Differenz $\alpha_k - \alpha_i$ so genommen, dafs von einem α mit gröfserem Index k eines mit kleinerem Index i abgezogen wird, und setzt man:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \\ \boldsymbol{B} &= \Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n), \\ \boldsymbol{D} &= \Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \end{aligned}$$

so dafs $\boldsymbol{D}$ auch als folgende Determinante $m+n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & \ldots & \beta_1^{m+n-1} \\ 1 & \beta_2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_2^{m+n-1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & \beta_n & \beta_n^2 & \ldots & \beta_n^{m+n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{m+n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{m+n-1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \ldots & \alpha_m^{m+n-1} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden kann, so ist

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{mn} \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}.\boldsymbol{P},$$

woraus für $(-1)^{mn}\boldsymbol{P}$ die oben erwähnte Darstellung $\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}}$ folgt.

Wendet man dagegen die *zweite Euler*sche oder *Bezout*sche (*Sylvester*s dialytische) Methode an, so hat man zwischen den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 = fx, \quad 0 = xfx, \quad \ldots \quad 0 = x^{n-1}fx, \\ 0 = \varphi x, \quad 0 = x\varphi x, \quad \ldots \quad 0 = x^{m-1}\varphi x \end{aligned}$$

die Potenzen $x^0, x^1, \ldots x^{m+n-1}$ zu eliminiren und erhält dann als Eliminations-Resultante die Determinante $m+n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c|l} 0 & a_0\ a_1 \ldots a_m\ 0\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 1 & 0\ a_0 \ldots a_{m-1}\ a_m\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots \\ n-1 & 0\ 0 \ldots\ldots\ldots 0\ a_0\ a_1 \ldots\ldots a_m \\ n & b_0\ b_1 \ldots\ldots\ldots b_{n-1}\ b_n\ 0 \ldots\ldots 0 \\ n+1 & 0\ b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots b_{n-1}\ b_n\ 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \\ m+n-1 & 0 \ldots\ldots 0\ b_0\ b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots b_n \end{array},$$

wo der Rang jeder Horizontalreihe durch die links vor derselben vor dem vertikalen Strich stehende Zahl angegeben ist.

Um nun die Identität von $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{R}$ zu zeigen, multiplicire man die beiden Determinanten $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{T}$ nach der gewöhnlichen Regel, d. h. man multiplicire die Elemente der i^{ten} Horizontalen in $\boldsymbol{D}$ mit den gleichnamigen der k^{ten} Horizontalen in $\boldsymbol{T}$ und setze die Summe der Producte an die k^{te} Stelle der i^{ten} Horizontalen eines neuen Determinanten-Schemas. Auf diese Weise ergiebt sich

$$\boldsymbol{D.T} = \begin{vmatrix} f\beta_1 & \beta_1 f\beta_1 & \beta_1^2 f\beta_1 \ldots & \beta_1^{n-1} f\beta_1 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ f\beta_2 & \beta_2 f\beta_2 & \beta_2^2 f\beta_2 \ldots & \beta_2^{n-1} f\beta_2 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ f\beta_n & \beta_n f\beta_n & \beta_n^2 f\beta_n \ldots & \beta_n^{n-1} f\beta_n & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & \varphi\alpha_1 & \alpha_1\varphi\alpha_1 \ldots \alpha_1^{m-1}\varphi\alpha_1 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & \varphi\alpha_2 & \alpha_2\varphi\alpha_2 \ldots \alpha_2^{m-1}\varphi\alpha_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & \varphi\alpha_m & \alpha_m\varphi\alpha_m \ldots \alpha_m^{m-1}\varphi\alpha_m \end{vmatrix}$$

oder, wenn man für die Determinante ihren Werth setzt,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D.T} &= \boldsymbol{A.B}.f\beta_1 f\beta_2 \ldots f\beta_n.\varphi\alpha_1\varphi\alpha_2 \ldots \varphi\alpha_m \\ &= (-1)^{mn} a_m^n b_n^m \boldsymbol{A.B.P}^2, \end{aligned}$$

und wenn man endlich auf beiden Seiten mit $D = (-1)^{mn} ABP$ hebt,

$$T = a_m^n b_n^m P = R.$$

Die beiden Formen R und T, in denen die Eliminations-Resultante nach der ersten und zweiten *Euler*schen Methode erscheint, sind also identisch, w. z. b. w.

Berlin, im November 1859.

Ueber den biquadratischen Character der Zahl „Zwei".

(Aus einem Briefe *Dirichlet*s an Herrn *Stern* zu Göttingen.)

Es sei p eine Primzahl der Form $4n+1$ und

$$p = a^2 + b^2,$$

wo a ungrade. Aus dieser Gleichung und der daraus folgenden

$$2p = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

ergiebt sich sogleich mit Anwendung des verallgemeinerten Symbols von ***Legendre:***

$$\left(\frac{p}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{a+b}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{p}{a+b}\right) = \left(\frac{2}{a+b}\right),$$

und dann nach bekannten Sätzen:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{a+b}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}((a+b)^2-1)}$$

oder, was dasselbe ist:

$$a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1, \quad (a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv (-1)^{\frac{1}{8}((a+b)^2-1)} \pmod{p}.$$

Andrerseits erhält man aus:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \equiv 2ab \pmod{p}$$

durch Erhebung zur Potenz $\frac{1}{4}(p-1)$:

$$(a+b)^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)} \cdot a^{\frac{1}{4}(p-1)} \cdot b^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p}$$

oder, wenn man

$$b \equiv af$$

setzt, und die beiden letzten Congruenzen berücksichtigt:

$$(-1)^{\frac{1}{8}((a+b)^2-1)} = (-1)^{\frac{1}{8}(p-1+2ab)} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)} \cdot f^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p}.$$

Nun ist, weil $a^2+b^2=p$, $b^2\equiv a^2f^2$, also $f^2\equiv -1 \pmod{p}$,

$$(f^2)^{\frac{1}{4}(p-1+2ab)} = f^{\frac{1}{4}(p-1)}.f^{\frac{1}{2}ab} \equiv 2^{\frac{1}{4}(p-1)}.f^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p}$$

oder, wenn man mit $f^{\frac{1}{4}(p-1)}$ dividirt

$$2^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv f^{\frac{1}{2}ab} \pmod{p},$$

welches Resultat in das von *Gauſs* im §. 24 seiner *theoria residuorum biquadraticorum* gegebene übergeht, wenn man mit $a^{\frac{1}{2}ab}$ multiplicirt und für af wieder b einführt.

Göttingen, den 21sten Januar 1857.

Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme.

(Von Herrn *E. E. Kummer* zu Berlin.)

Die Systeme grader Linien, welche den ganzen Raum oder einen Theil des Raumes so ausfüllen, dafs durch jeden Punkt ein Strahl oder eine gewisse Anzahl discreter Strahlen geht, sind in ihrer ganzen Allgemeinheit bisher noch wenig untersucht worden. Man hat sich in der geometrischen Betrachtung der Strahlensysteme hauptsächlich auf diejenige besondere Art beschränkt, wo alle Strahlen als Normalen einer und derselben Fläche auftreten, deren Theorie mit der Lehre von der Krümmung der Flächen in der engsten Beziehung steht, und deren ausgezeichnetste Eigenschaften von *Monge* gefunden worden sind, welcher sie in mehreren Capiteln seiner *Application de l'Analyse à la Géométrie* entwickelt hat. Da die Systeme von Strahlen im Raume für die Optik eine grofse Bedeutung haben, so ist die Theorie derselben auch im physikalischen Interesse mehrfach behandelt worden; von dieser Seite her ist man aber ebenfalls nicht viel über die Systeme der Normalen einer Fläche hinausgekommen. Es hat hier merkwürdigerweise grade einer der schönsten Sätze der Optik die Ausbildung der allgemeinen Theorie gehindert, nämlich der von *Malus* gefundene und von *Dupin* verallgemeinerte Satz: dafs die von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahlen, nachdem sie eine beliebige Anzahl von Reflexionen an beliebig gestalteten Spiegeln, und von Refractionen beim Durchgange durch beliebig begränzte Medien anderer brechender Kraft erlitten haben, stets die Eigenschaft behalten, Normalen einer Fläche zu sein. Nur beim Durchgange des Lichtes durch Krystalle geht den irregulären Strahlen diese Eigenschaft verloren; diese bilden Systeme von Strahlen, die nicht auf einer Fläche normal stehen können, welche wegen dieser Entstehungsweise irreguläre Strahlensysteme genannt worden sind. Obgleich die Krystalle auch nur besondere Arten derselben hervorbringen, so haben sie doch zur Betrachtung der allgemeinsten Strahlensysteme den Anstofs gegeben. Diese sind, so viel mir bekannt ist, zuerst von *Hamilton* in den *Transactions of the Royal Irish Academy,* Bd. XVI behandelt worden in einem Supplemente zu seiner

grofsen Abhandlung: ***Theory of systems of Rays,*** in welcher selbst sie noch nicht vorkommen, weil diese Abhandlung, den Zwecken der Optik dienend, nur die regulären Systeme und deren Veränderungen durch Reflexionen und Refractionen, von den irregulären Systemen aber nur diejenigen betrachtet, welche beim Durchgange des Lichts durch Krystalle entstehen. In dem erwähnten ersten Supplemente zu dieser Abhandlung geht ***Hamilton*** ebenfalls von physikalischen Principien, namentlich von dem Principe der kleinsten Wirkung aus, aber er verfolgt in derselben als Hauptzweck: die geometrischen Eigenschaften der allgemeinen Strahlensysteme der Optik aus der einen Grundformel zu entwickeln, welche dieses Princip gewährt. Er hat auf diesem Wege eine Reihe ausgezeichneter Eigenschaften der allgemeinen gradlinigen Strahlensysteme gefunden, welche jedoch nur wenig bekannt zu sein scheinen, da in mehreren späteren mathematischen Aufsätzen über verwandte Gegenstände keine Rücksicht darauf genommen wird. Diese von ***Hamilton*** zuerst behandelte Theorie der allgemeinen gradlinigen Strahlensysteme, durch eine neue Begründung, der analytischen Geometrie des Raumes anzueignen und sie zugleich in mehreren wesentlichen Punkten zu vervollständigen, soll der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung sein.

§. 1.

Vorbereitende Formeln und Bezeichnungen.

Eine jede grade Linie des Strahlensystems soll bestimmt werden durch einen Punkt, durch welchen sie hindurchgeht, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z seien, und durch die Winkel, welche sie mit den drei Coordinatenaxen bildet, deren Cosinus durch ξ, η, ζ bezeichnet werden. Das Gesetz, welches die graden Linien zu einem Systeme verbindet, wird dadurch gegeben, dafs die sechs Bestimmungsstücke derselben: x, y, z, ξ, η, ζ als continuirliche Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen u und v bestimmt werden. Die Punkte x, y, z liegen alsdann auf einer bestimmten Fläche, und die Strahlen des Systems werden alle als von den einzelnen Punkten dieser Fläche ausgehend betrachtet. Ein jeder Punkt in einem Strahle wird durch seine Entfernung vom Ausgangspunkte des Strahls bestimmt, also durch seine auf diesem Strahl gemessene Abscisse, welche mit r bezeichnet werden soll.

Betrachtet man zwei verschiedene Strahlen des Systems, den einen, dessen Ausgangspunkt und Richtung durch die Gröfsen x, y, z, ξ, η, ζ be-

stimmt sind und einen zweiten, für welchen diese Gröfsen die Werthe $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, $\xi+\Delta\xi$, $\eta+\Delta\eta$, $\zeta+\Delta\zeta$ haben, wo Δx, Δy u. s. w. endliche Differenzen bezeichnen, so wird das Verhältnifs beider Strahlen gegen einander durch folgende Stücke bestimmt: erstens durch den Winkel ε, den sie mit einander machen, zweitens durch die Länge p der auf beiden zugleich senkrecht stehenden Linie, d. i. durch den kürzesten Abstand derselben, drittens durch die Richtung dieses Perpendikels, also durch die Cosinus der Winkel, welche dasselbe mit den drei Coordinatenaxen macht, welche $\varkappa$, λ, μ heifsen sollen, und viertens durch die Abscisse r desjenigen Punktes im ersten Strahle, in welchem dieser seinen kürzesten Abstand vom zweiten Strahle hat. Diese vier Stücke werden, wie in den Elementen der analytischen Geometrie gezeigt wird, auf folgende Weise durch die Ausgangspunkte und die Richtungen der beiden Strahlen bestimmt:

$$(1.)\quad \cos\varepsilon = \xi(\xi+\Delta\xi)+\eta(\eta+\Delta\eta)+\zeta(\zeta+\Delta\zeta),$$

$$(2.)\quad \sin^2\varepsilon = (\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta)^2+(\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta)^2+(\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi)^2,$$

$$(3.)\quad p\sin\varepsilon = (\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta)\Delta x+(\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta)\Delta y+(\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi)\Delta z,$$

$$(4.)\quad \varkappa = \frac{\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta}{\sin\varepsilon},\quad \lambda = \frac{\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta}{\sin\varepsilon},\quad \mu = \frac{\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi}{\sin\varepsilon},$$

$$(5.)\quad p = \varkappa\Delta x+\lambda\Delta y+\mu\Delta z,$$

$$(6.)\quad r\sin\varepsilon = (\mu(\eta+\Delta\eta)-\lambda(\zeta+\Delta\zeta))\Delta x+(\varkappa(\zeta+\Delta\zeta)-\mu(\xi+\Delta\xi))\Delta y +(\lambda(\xi+\Delta\xi)-\varkappa(\eta+\Delta\eta))\Delta z.$$

Vermittelst der beiden Gleichungen

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1,$$
$$(\xi+\Delta\xi)^2+(\eta+\Delta\eta)^2+(\zeta+\Delta\zeta)^2 = 1,$$

aus welchen man die Gleichung

$$(7.)\quad \xi\Delta\xi+\eta\Delta\eta+\zeta\Delta\zeta = -\tfrac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)$$

erhält, kann man die Ausdrücke des $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$ und r auch in folgende Formen setzen:

$$(8.)\quad \cos\varepsilon = 1-\tfrac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2),$$

$$(9.)\quad \sin^2\varepsilon = \Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2-\tfrac{1}{4}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)^2,$$

$$(10.)\quad r\sin^2\varepsilon = -(\Delta x\Delta\xi+\Delta y\Delta\eta+\Delta z\Delta\zeta)+ \tfrac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)(\Delta x(\xi+\Delta\xi)+\Delta y(\eta+\Delta\eta)+\Delta z(\zeta+\Delta\zeta)).$$

Betrachtet man ferner den Abstand der beiden graden Linien in irgend einem beliebigen Punkte, welcher durch die Länge einer Linie gemessen

wird, die vom zweiten Strahle nach dem ersten so gezogen wird, dafs sie auf diesem senkrecht steht, und nennt die Länge dieser Linie q, die Abscisse des Punktes, in welchem sie auf dem ersten Strahle senkrecht steht, R und die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Coordinatenaxen bildet, $\varkappa'$, λ', μ', so giebt die analytische Geometrie für diese Gröfsen folgende Ausdrücke:

$$(11.)\quad \begin{cases} q\varkappa' = \Delta x - R\xi + \dfrac{(R-P)(\xi+\Delta\xi)}{\cos\varepsilon}, \\ q\lambda' = \Delta y - R\eta + \dfrac{(R-P)(\eta+\Delta\eta)}{\cos\varepsilon}, \\ q\mu' = \Delta z - R\zeta + \dfrac{(R-P)(\zeta+\Delta\zeta)}{\cos\varepsilon}, \end{cases}$$

in welchen der Kürze halber

$$P = \xi\Delta x + \eta\Delta y + \zeta\Delta z$$

gesetzt ist.

Wenn man den zweiten Strahl dem ersten unendlich nahe rücken läfst, so dafs die Differenzen Δx, Δy, Δz, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ in die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ übergehen, so werden die Abstände p und q und der Winkel ε unendlich klein und sollen durch dp, dq und $d\varepsilon$ bezeichnet werden; die unendlich kleinen Gröfsen der höheren Ordnungen verschwinden alsdann gegen die der niederen Ordnungen, und man erhält:

$$(12.)\quad d\varepsilon^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

$$(13.)\quad \varkappa = \frac{\eta d\zeta - \zeta d\eta}{d\varepsilon}, \quad \lambda = \frac{\zeta d\xi - \xi d\zeta}{d\varepsilon}, \quad \mu = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{d\varepsilon},$$

$$(14.)\quad dp = \varkappa dx + \lambda dy + \mu dz,$$

$$(15.)\quad r = -\frac{dx\,d\xi + dy\,d\eta + dz\,d\zeta}{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

$$(16.)\quad \begin{cases} \varkappa' dq = dx + Rd\xi - \xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \lambda' dq = dy + Rd\eta - \eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \mu' dq = dz + Rd\zeta - \zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz). \end{cases}$$

Weil x, y, z, ξ, η, ζ Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen u und v sind, so müssen die Differentiale derselben durch die nach u und v genommenen partiellen Differentialquotienten und durch die Differentiale du und dv ausgedrückt werden. Hierbei sollen für die ersten partiellen Differentialquotienten und für die aus denselben zusammengesetzten Ausdrücke dieselben Bezeichnungen gewählt werden, welche *Gaufs* in der Abhandlung

Disquisitiones generales circa superficies curvas angewendet hat, nämlich:

$$(17.)\quad dx = a\,du + a'\,dv, \quad dy = b\,du + b'\,dv, \quad dz = c\,du + c'\,dv,$$

$$(18.)\quad bc' - b'c = A, \quad ca' - c'a = B, \quad ab' - a'b = C,$$

$$(19.)\quad a^2 + b^2 + c^2 = E, \quad aa' + bb' + cc' = F, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = G.$$

Ferner sollen für die partiellen Differentialquotienten der Gröfsen ξ, η, ζ und für die aus denselben zusammengesetzten Ausdrücke folgende analoge Bezeichnungen angewendet werden:

$$(20.)\quad d\xi = \mathrm{a}\,du + \mathrm{a}'\,dv, \quad d\eta = \mathrm{b}\,du + \mathrm{b}'\,dv, \quad d\zeta = \mathrm{c}\,du + \mathrm{c}'\,dv,$$

$$(21.)\quad \mathrm{bc}' - \mathrm{b}'\mathrm{c} = \mathrm{A}, \quad \mathrm{ca}' - \mathrm{c}'\mathrm{a} = \mathrm{B}, \quad \mathrm{ab}' - \mathrm{a}'\mathrm{b} = \mathrm{C},$$

$$(22.)\quad \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 = \mathrm{E}, \quad \mathrm{aa}' + \mathrm{bb}' + \mathrm{cc}' = \mathrm{F}, \quad \mathrm{a}'^2 + \mathrm{b}'^2 + \mathrm{c}'^2 = \mathrm{G},$$

und aufserdem

$$(23.)\quad \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \Delta^2.$$

Ferner sollen noch folgende vier aus den partiellen Differentialquotienten von x, y, z und von ξ, η, ζ zusammengesetzte Ausdrücke durch einfache Buchstaben bezeichnet werden:

$$(24.)\quad \begin{cases} a\mathrm{a} + b\mathrm{b} + c\mathrm{c} = \mathrm{e}, \\ a'\mathrm{a} + b'\mathrm{b} + c'\mathrm{c} = \mathrm{f}, \\ a\mathrm{a}' + b\mathrm{b}' + c\mathrm{c}' = \mathrm{f}', \\ a'\mathrm{a}' + b'\mathrm{b}' + c'\mathrm{c}' = \mathrm{g}. \end{cases}$$

Der Quotient der Differentiale der beiden unabhängigen Veränderlichen du und dv soll einfach durch t bezeichnet werden, also

$$(25.)\quad \frac{dv}{du} = t.$$

Aus der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

welche durch partielle Differentiation nach u und v die Gleichungen

$$(26.)\quad \begin{cases} \xi\mathrm{a} + \eta\mathrm{b} + \zeta\mathrm{c} = 0, \\ \xi\mathrm{a}' + \eta\mathrm{b}' + \zeta\mathrm{c}' = 0, \end{cases}$$

giebt, erhält man auch folgende Ausdrücke von ξ, η, ζ durch ihre partiellen Differentialquotienten

$$(27.)\quad \xi = \frac{\mathrm{A}}{\Delta}, \quad \eta = \frac{\mathrm{B}}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{\mathrm{C}}{\Delta},$$

welche mit grofsem Vortheil angewendet werden, welche aber in dem besonderen Falle unbestimmt sind, wo $\Delta = 0$ ist. Die Bedingung $\Delta = 0$, aus

welcher $A=0$, $B=0$, $C=0$ folgt, findet nur für eine specielle Art von Strahlensystemen Statt, welche in ihrer Behandlung einige leichte Modificationen der allgemeinen Methode erfordern, die aber in dem Folgenden nicht besonders ausgeführt werden sollen, weil diese Strahlensysteme auch als Gränzfälle der allgemeinen aufgefafst werden können.

§. 2.

Die Gränzpunkte der kürzesten Abstände eines Strahls von den unendlich nahen Strahlen.

Der Ausdruck (15.) der Abscisse desjenigen Punktes des ersten Strahls, in welchem er seinen kürzesten Abstand von dem unendlich nahen Strahle hat, giebt, wenn die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch die partiellen Differentialquotienten und durch die Differentiale du und dv der unabhängigen Variabeln ausgedrückt werden, nach den festgesetzten Zeichen:

$$(1.) \qquad r = -\frac{e+(f+f')t+gt^2}{E+2Ft+Gt^2}.$$

Für einen bestimmten Werth des $t=\frac{dv}{du}$ giebt dieser Ausdruck der Abscisse r den kürzesten Abstand des ersten Strahls von *einem* bestimmten unendlich nahen Strahle; die betreffenden Werthe des r für alle unendlich nahen Strahlen rings um einen Strahl herum erhält man, wenn man dem t nach einander alle möglichen Werthe von $t=-\infty$ bis $t=+\infty$ giebt. Der Nenner dieses Ausdrucks kann für keinen dieser Werthe des t gleich Null werden, weil $EG-F^2=A^2+B^2+C^2$ niemals negativ ist und weil der specielle Fall ausgeschlossen wird, wo $EG-F^2$ gleich Null ist. Die Werthe des r können also niemals unendlich grofs werden und müssen darum stets in bestimmten endlichen Gränzen enthalten sein, welche durch ein Maximum und ein Minimum des r gegeben werden. Man hat daher folgenden Satz:

Die kürzesten Abstände eines Strahls von allen ihn umgebenden unendlich nahen Strahlen liegen in einem durch zwei bestimmte Punkte begränzten Theile dieses Strahls.

Der nach t genommene Differentialquotient des r, gleich Null gesetzt, ergiebt für die Werthe des t, welche den beiden Gränzpunkten der kürzesten Abstände des Strahls von den unendlich nahen Strahlen entsprechen, folgende Gleichung:

$$(2.) \quad (E+2Ft+Gt^2)(f+f'+2gt)-(e+(f+f')t+gt^2)(2F+2Gt)=0.$$

oder vereinfacht:

$$(3.)\quad (E+Ft)(\tfrac{1}{2}(f+f')+gt)-(F+Gt)(e+\tfrac{1}{2}(f+f')t)=0,$$

und nach Potenzen von t geordnet:

$$(4.)\quad (gF-\tfrac{1}{2}(f+f')G)t^2-(eG-gE)t+(\tfrac{1}{2}(f+f')E-eF)=0.$$

Die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, welche, wie oben gezeigt worden ist, stets real sein müssen, seien t_1 und t_2, so hat man:

$$(5.)\quad t_1+t_2=\frac{eG-gE}{gF-\frac{1}{2}(f+f')G},\qquad t_1t_2=\frac{\frac{1}{2}(f+f')E-eF}{gF-\frac{1}{2}(f+f')G},$$

woraus sich die beiden bemerkenswerthen Gleichungen

$$(6.)\quad E+F(t_1+t_2)+Gt_1t_2=0,$$

$$(7.)\quad e+\tfrac{1}{2}(f+f')(t_1+t_2)+gt_1t_2=0$$

ergeben, denen noch folgende, aus diesen leicht abzuleitende Gleichungen hinzugefügt werden mögen:

$$(8.)\quad E+2Ft_1+Gt_1^2=(t_1-t_2)(F+Gt_1),$$

$$(9.)\quad E+2Ft_2+Gt_2^2=(t_2-t_1)(F+Gt_2),$$

$$(10.)\quad (F+Gt_1)(F+Gt_2)=-\Delta^2,$$

$$(11.)\quad (E+2Ft_1+Gt_1^2)(E+2Ft_2+Gt_2^2)=\Delta^2(t_2-t_1)^2.$$

Bezeichnet man nun die beiden äufsersten Werthe der Abscisse r, welche den Werthen des $t=t_1$ und $t=t_2$ angehören, durch r_1 und r_2, so hat man:

$$(12.)\quad r_1=-\frac{e+(f+f')t_1+gt_1^2}{E+2Ft_1+Gt_1^2},$$

$$(13.)\quad r_2=-\frac{e+(f+f')t_2+gt_2^2}{E+2Ft_2+Gt_2^2},$$

welche Ausdrücke vermöge der Gleichungen (2.) und (3.) folgende einfachere Formen annehmen:

$$(14.)\quad r_1=-\frac{e+\frac{1}{2}(f+f')t_1}{E+Ft_1}=-\frac{\frac{1}{2}(f+f')+gt_1}{F+Gt_1},$$

$$(15.)\quad r_2=-\frac{e+\frac{1}{2}(f+f')t_2}{E+Ft_2}=-\frac{\frac{1}{2}(f+f')+gt_2}{F+Gt_2}.$$

Eliminirt man t_1 oder t_2 aus diesen Gleichungen, so erhält man folgende quadratische Gleichung, deren stets reale Wurzeln r_1 und r_2 die Abscissen der Gränzpunkte der kürzesten Abstände eines jeden Strahls von allen unendlich nahen Strahlen sind:

$$(16.)\quad (EG-F^2)r^2+(gE-(f+f')F+eG)r+eg-\tfrac{1}{4}(f+f')^2=0,$$

aus welcher folgt:

$$(17.)\qquad r_1+r_2=-\frac{gE-(f+f')F+eG}{\Delta^2},\qquad r_1r_2=\frac{eg-\frac{1}{4}(f+f')^2}{\Delta^2}.$$

Die Ausdehnung des Intervalls, in welchem die kürzesten Abstände eines Strahls von allen ihm unendlich nahen Strahlen liegen, ist gleich dem Unterschiede der Abscissen der beiden Gränzpunkte desselben, also gleich r_2-r_1. Bezeichnet man diese Länge mit $2d$ und die Abscisse des Mittelpunkts dieser beiden Gränzpunkte mit m, so hat man:

$$(18.)\qquad d=\frac{r_2-r_1}{2},\qquad m=\frac{r_2+r_1}{2}.$$

§. 3.

Die Richtungen der kürzesten Abstände und die Hauptebenen.

Es sollen nun auch die Richtungen in Betracht gezogen werden, welche die kürzesten Abstände eines Strahls von seinen unendlich nahen Strahlen haben, welche durch die oben mit $\varkappa$, λ, μ bezeichneten Cosinus der Winkel bestimmt sind, die sie mit den drei Coordinatenaxen machen. Ersetzt man in den bei (13.) §. 1 gegebenen Ausdrücken dieser Gröfsen die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch die partiellen Differentialquotienten und die Differentiale der unabhängigen Variabeln du und dv, deren Quotient mit t bezeichnet wird, so erhält man:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{\eta c-\zeta b+(\eta c'-\zeta b')t}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \\ \lambda = \dfrac{\zeta a-\xi c+(\zeta a'-\xi c')t}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \\ \mu = \dfrac{\xi b-\eta a+(\xi b'-\eta a')t}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}. \end{cases}$$

Nimmt man nun für ξ, η, ζ die oben bei (27.) §. 1 gegebenen Ausdrücke:

$$\xi=\frac{A}{\Delta},\qquad \eta=\frac{B}{\Delta},\qquad \zeta=\frac{C}{\Delta},$$

und beachtet, dafs

$$\begin{aligned} Bc-Cb&=a'E-aF, & Bc'-Cb'&=a'F-aG,\\ Ca-Ac&=b'E-bF, & Ca'-Ac'&=b'F-bG,\\ Ab-Ba&=c'E-cF, & Ab'-Ba'&=c'F-cG \end{aligned}$$

ist, so erhält man:

$$(2.)\quad \begin{cases} \varkappa = \dfrac{a'(E+Ft)-a(F+Gt)}{\Delta\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \\ \lambda = \dfrac{b'(E+Ft)-b(F+Gt)}{\Delta\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \\ \mu = \dfrac{c'(E+Ft)-c(F+Gt)}{\Delta\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}. \end{cases}$$

Betrachtet man nun ins Besondere die Richtungen derjenigen beiden kürzesten Abstände, welche in den beiden Gränzpunkten Statt haben, also für $t=t_1$ und $t=t_2$, für welche die besonderen Werthe von $\varkappa$, λ, μ durch $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 und $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 bezeichnet werden sollen, so erhält man vermöge der Gleichung (6.) §. 2, welche zeigt, dafs $E+Ft_1=-t_2(F+Gt_1)$ ist, zunächst folgende Ausdrücke:

$$(3.)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = -\dfrac{(a+a't_2)(F+Gt_1)}{\Delta V_1}, \\ \lambda_1 = -\dfrac{(b+b't_2)(F+Gt_1)}{\Delta V_1}, \\ \mu_1 = -\dfrac{(c+c't_2)(F+Gt_1)}{\Delta V_1}, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen

$$\sqrt{E+2Ft_1+Gt_1^2} = V_1$$

gesetzt ist. Bezeichnet man in ähnlicher Weise die entsprechende Wurzelgröfse

$$\sqrt{E+2Ft_2+Gt_2^2} = V_2,$$

so hat man nach (11.) und (8.) §. 2

$$(4.)\quad V_1V_2=\Delta(t_2-t_1),\qquad \frac{\Delta V_1}{F+Gt_1}=V_2,\qquad \frac{\Delta V_2}{F+Gt_2}=-V_1,$$

und demnach:

$$(5.)\quad \varkappa_1=-\frac{a+a't_2}{V_2},\qquad \lambda_1=-\frac{b+b't_2}{V_2},\qquad \mu_1=-\frac{c+c't_2}{V_2},$$

woraus man die Werthe von $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 durch Vertauschung von t_2 und t_1 erhält, bei welcher V_2 in $-V_1$ übergeht:

$$(6.)\quad \varkappa_2=\frac{a+a't_1}{V_1},\qquad \lambda_2=\frac{b+b't_1}{V_1},\qquad \mu_2=\frac{c+c't_1}{V_1}.$$

Der Cosinus des Winkels, welchen die Richtungen der kürzesten Abstände eines Strahls von den unendlich nahen Strahlen in den beiden Gränzpunkten mit einander machen, hat den Werth:

$$\varkappa_1\varkappa_2+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2=-\frac{(a+a't_2)(a+a't_1)+(b+b't_2)(b+b't_1)+(c+c't_2)(c+c't_1)}{V_1V_2},$$

welcher nach Ausführung der Multiplication in den einzelnen Theilen

$$\varkappa_1\varkappa_2+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2 = -\frac{E+2F(t_1+t_2)+Gt_1t_2}{V_1V_2}$$

giebt, also, vermöge der Gleichung (6.) §. 2, gleich Null ist, woraus folgt, dafs dieser Winkel ein rechter ist. Man hat also folgenden Satz:

Die kürzesten Abstände eines Strahls von denjenigen unendlich nahen Strahlen, für welche dieselben in den beiden Gränzpunkten liegen, sind senkrecht gegen einander gerichtet.

Diejenigen durch einen Strahl gehenden zwei Ebenen, welche auf den Richtungen der kürzesten Abstände in den beiden Gränzpunkten senkrecht stehen, sollen die ***Hauptebenen*** dieses Strahls genannt werden. Diese beiden Hauptebenen, welche nach dem soeben bewiesenen Satze auf einander senkrecht stehen, oder die auf denselben senkrecht stehenden Richtungen der kürzesten Abstände in den beiden Gränzpunkten werden am passendsten als diejenigen gewählt, von denen aus die um einen Strahl rings herum liegenden, auf demselben senkrechten Richtungen durch Winkel gemessen werden.

Es sei ω der Winkel, welchen die Richtung des kürzesten Abstandes des ersten Strahls von einem beliebigen unendlich nahen Strahle mit der Richtung des kürzesten Abstandes in dem einen Gränzpunkte bildet, dessen Abscisse gleich r_1 ist, oder was dasselbe ist, der Neigungswinkel dieser Richtung mit der zweiten Hauptebene des Strahls, so hat man:

$$(7.)\qquad \cos\omega = \varkappa_1\varkappa+\lambda_1\lambda+\mu_1\mu,$$

und wenn die bei (2.) und (6.) gegebenen Ausdrücke von $\varkappa$, λ, μ, $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 eingesetzt werden:

$$(8.)\qquad \cos\omega = -\frac{E+Ft_1+t(F+Gt_1)}{V_1\sqrt{E+2Ft+Gt^2}},$$

oder vermöge der Gleichung (6.) §. 2

$$(9.)\qquad \cos\omega = \frac{(F+Gt_1)(t_2-t)}{V_1\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}.$$

Hieraus erhält man:

$$(10.)\qquad \sin\omega = \frac{\Delta(t-t_1)}{V_1\sqrt{E+2Ft+Gt^2}},$$

$$(11.)\qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{\Delta(t-t_1)}{(F+Gt_1)(t_2-t)},$$

und folglich

$$(12.)\qquad t = \frac{\Delta t_1\cos\omega+(F+Gt_1)t_2\sin\omega}{\Delta\cos\omega+(F+Gt_1)\sin\omega},$$

mittelst welcher Formel man den Quotienten $t = \frac{dv}{du}$ überall durch den Winkel ω ersetzen kann, der die geometrische Beziehung eines benachbarten Strahls zu dem ersten Strahle unmittelbarer ausdrückt als jener Quotient. Führt man diese Substitution aus in dem Ausdrucke

$$r = -\frac{e+(f+f')t+gt^2}{E+2Ft+Gt^2}$$

der Abscisse desjenigen Punktes eines gegebenen Strahls, in welchem einer der unendlich nahen Strahlen den kürzesten Abstand von ihm hat, so erhält man zunächst

$$(13.) \qquad E+2Ft+Gt^2 = \frac{\Delta^2 V_1^2}{(\Delta\cos\omega+(F+Gt_1)\sin\omega)^2},$$

ferner erhält man

$$(14.) \qquad e+(f+f')t+gt^2$$
$$= \frac{\Delta^2(e+(f+f')t_1+gt_1^2)\cos^2\omega+(F+Gt_1)(e+(f+f')t_2+gt_2^2)\sin^2\omega}{(\Delta\cos\omega+(F+Gt_1)\sin\omega)^2}.$$

Durch Division dieser beiden Ausdrücke, wenn man noch von der Formel (4.) Gebrauch macht, nach welcher $\Delta^2 V_1^2 = (F+Gt_1)^2 V_2^2$ ist, hat man

$$(15.) \qquad r = -\frac{e+(f+f')t_1+gt_1^2}{E+2Ft_1+Gt_1^2}\cos^2\omega - \frac{e+(f+f')t_2+gt_2^2}{E+2Ft_2+Gt_2^2}\sin^2\omega,$$

und vermöge der bei (12.) und (13.) §. 2 gegebenen Ausdrücke von r_1 und r_2:

$$(16.) \qquad r = r_1\cos^2\omega + r_2\sin^2\omega.$$

Diese elegante Formel, welche eine sehr einfache Beziehung der Gränzpunkte der kürzesten Abstände eines Strahls zu dem kürzesten Abstande eines beliebigen unendlich nahen Strahls ausdrückt, hat ***Hamilton*** in dem schon oben angeführten Supplemente zu seiner Abhandlung ***On the Theory of Systems of Rays*** gefunden, in welcher er die Punkte, in denen zwei unendlich nahe Strahlen ihren kürzesten Abstand haben, unter dem Namen ***„virtual foci“*** behandelt; auch hat er daselbst die Gränzpunkte der kürzesten Abstände und die beiden auf einander senkrecht stehenden Hauptebenen eines jeden Strahls zuerst nachgewiesen.

§. 4.

Die Brennpunkte der Strahlen, die Mittelpunkte derselben und die Fokalebenen.

Für die Gröfse des kürzesten Abstandes dp zweier unendlich nahen Strahlen und für den unendlich kleinen Winkel $d\varepsilon$, unter welchem diese Strahlen gegen einander geneigt sind, findet man aus den oben bei (12.) und (14.)

§. 1 gegebenen Ausdrücken, durch Einführung der partiellen Differentialquotienten und der Differentiale du und dv der beiden unabhängigen Variabeln anstatt der Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und durch Anwendung der gefundenen Werthe der Gröfsen $\varkappa$, λ, μ, folgende Ausdrücke:

$$(1.) \qquad d\varepsilon = du\sqrt{E+2Ft+Gt^2},$$

$$(2.) \qquad dp = \frac{du((f'+gt)(E+Ft)-(e+ft)(F+Gt))}{\Delta\sqrt{E+2Ft+Gt^2}},$$

also

$$(3.) \qquad \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{(f'+gt)(E+Ft)-(e+ft)(F+Gt)}{\Delta(E+2Ft+Gt^2)}.$$

Hieraus folgt, dafs für diejenigen Werthe des t, welche der Gleichung

$$(4.) \qquad (f'+gt)(E+Ft)-(e+ft)(F+Gt) = 0$$

genügen, der Strahl von den betreffenden unendlich nahen Strahlen geschnitten wird, das heifst, dafs der kürzeste Abstand des Strahls, welcher im allgemeinen eine unendlich kleine Gröfse der ersten Ordnung ist, für diese besonderen Werthe des t, also für die denselben zugehörenden unendlich nahen Strahlen, eine unendlich kleine Gröfse einer höheren Ordnung ist. Diese Bedingungsgleichung entwickelt, giebt:

$$(5.) \qquad (gF-fG)t^2+(gE-(f-f')F-eG)t+f'E-eF = 0,$$

und wenn die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung mit τ_1 und τ_2 bezeichnet werden, so ist

$$(6.) \qquad \tau_1+\tau_2 = \frac{-gE+(f-f')F+eG}{gF-fG}, \qquad \tau_1\tau_2 = \frac{f'E-eF}{gF-fG}.$$

Diese quadratische Gleichung hat nicht die ausgezeichnete Eigenschaft der oben behandelten, dafs ihre Wurzeln τ_1 und τ_2 stets real sind; dieselben werden vielmehr real oder imaginär je nach der Beschaffenheit der Gesetze, welche die graden Linien im Raume zu einem Systeme verbinden. Man hat demnach zwei besondere Gattungen von Strahlensystemen zu unterscheiden, nämlich solche, in welchen jeder Strahl von zwei unendlich nahen Strahlen geschnitten wird, und solche, in denen ein Schneiden unendlich naher Strahlen überhaupt nicht Statt findet. Als dritte Gattung von Strahlensystemen kommen noch diejenigen hinzu, in welchen gewisse Theile des Systems der ersten, andere der zweiten Gattung angehören.

Diejenigen beiden Punkte in einem Strahle, in welchen er von den unendlich nahen Strahlen geschnitten wird, werden die ***Brennpunkte*** dieses

Strahls genannt. Dieselben sind als reale Punkte nur dann vorhanden, wenn τ_1 und τ_2 real sind.

Die Abscissen der beiden Brennpunkte findet man aus dem allgemeinen Ausdrucke der Abscisse des Punktes, in welchem der Strahl seinen kürzesten Abstand von einem unendlich nahen Strahle hat, welcher oben (1.) §. 2 gefunden worden ist, wenn man in demselben dem t die beiden bestimmten Werthe τ_1 und τ_2 giebt. Bezeichnet man die denselben entsprechenden Abscissen der Brennpunkte mit ϱ_1 und ϱ_2, so hat man

$$(7.)\quad \begin{cases} \varrho_1 = -\dfrac{e+(f+f')\tau_1+g\tau_1^2}{E+2F\tau_1+G\tau_1^2}, \\ \varrho_2 = -\dfrac{e+(f+f')\tau_2+g\tau_2^2}{E+2F\tau_2+G\tau_2^2}, \end{cases}$$

welche Ausdrücke vermöge der quadratischen Gleichung (4.), deren Wurzeln τ_1 und τ_2 sind, folgende einfachere Formen erhalten:

$$(8.)\quad \begin{cases} \varrho_1 = -\dfrac{e+f\tau_1}{E+F\tau_1} = -\dfrac{f'+g\tau_1}{F+G\tau_1}, \\ \varrho_2 = -\dfrac{e+f\tau_2}{E+F\tau_2} = -\dfrac{f'+g\tau_2}{F+G\tau_2}. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen τ_1 oder τ_2, so erhält man folgende quadratische Gleichung, deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 sind:

$$(9.)\quad (EG-F^2)r^2+(gE-(f+f')F+eG)r+eg-ff'=0,$$

man hat daher

$$(10.)\quad \varrho_1+\varrho_2 = -\frac{gE-(f+f')F+eG}{\Delta^2}, \qquad \varrho_1\varrho_2 = \frac{eg-ff'}{\Delta^2}.$$

Vergleicht man diese quadratische Gleichung, deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 die Abscissen der beiden Brennpunkte sind, mit derjenigen, deren Wurzeln r_1 und r_2 die Abscissen der Gränzpunkte der kürzesten Abstände sind, so hat man

$$(11.)\quad \varrho_1+\varrho_2 = r_1+r_2,$$

$$(12.)\quad \varrho_1\varrho_2 = r_1r_2+\frac{(f-f')^2}{4\Delta^2}.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt folgenden Satz:

Der Mittelpunkt der beiden Brennpunkte eines jeden Strahls fällt mit dem Mittelpunkte der beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände zusammen.

Dieser gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Brennpunkte und der beiden Gränzpunkte soll der ***Mittelpunkt des Strahls*** genannt werden.

Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte sei gleich δ, also

$$(13.) \qquad \delta = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2}.$$

Die vier Gröfsen r_1, r_2, ϱ_1, ϱ_2 können durch die drei Gröfsen m, d und δ ausgedrückt werden; man erhält nämlich aus der Gleichung (11.) und aus den beiden Gleichungen (18.) §. 2:

$$(14.) \qquad \begin{cases} r_2 = m + d, & r_1 = m - d, \\ \varrho_2 = m + \delta, & \varrho_1 = m - \delta. \end{cases}$$

Die Gleichung (12.) giebt demnach

$$(15.) \qquad d^2 - \delta^2 = \frac{(\mathrm{f} - \mathrm{f}')^2}{4\Delta^2},$$

woraus folgt, ***dafs der Abstand der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkte niemals gröfser ist, als der Abstand der beiden Gränzpunkte der kürzesten Entfernungen vom Mittelpunkte,*** dafs also die Brennpunkte stets nur zwischen den Gränzpunkten der kürzesten Abstände liegen oder höchstens mit denselben zusammenfallen können.

Die beiden Ebenen, welche durch einen Strahl und durch je einen der beiden unendlich nahen Strahlen gehen, welche diesen Strahl schneiden, sollen die ***Fokalebenen*** dieses Strahls genannt werden.

Die Fokalebenen sind nur dann als reale Ebenen vorhanden, wenn die Brennpunkte real sind, die Lage derselben gegen einander und gegen die Hauptebenen wird am einfachsten aus der Gleichung $r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega$ bestimmt, welche

$$(16.) \qquad \cos^2\omega = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \qquad \sin^2\omega = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$$

giebt. Nimmt man nämlich $r = \varrho_1$, so wird ω der Winkel, welchen die erste Fokalebene mit der ersten Hauptebene macht, nimmt man $r = \varrho_2$, so wird ω der Winkel der zweiten Fokalebene mit der ersten Hauptebene. Bezeichnet man diese beiden Winkel mit ω_1 und ω_2, so giebt der Unterschied $\omega_2 - \omega_1$ den Winkel, den die beiden Fokalebenen mit einander machen, welcher mit γ bezeichnet werden soll. Man hat daher:

$$(17.) \qquad \begin{cases} \cos^2\omega_1 = \dfrac{r_2 - \varrho_1}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_1 = \dfrac{\varrho_1 - r_1}{r_2 - r_1}, \\ \cos^2\omega_2 = \dfrac{r_2 - \varrho_2}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_2 = \dfrac{\varrho_2 - r_1}{r_2 - r_1}, \end{cases}$$

und, wenn man nach den Gleichungen (14.) die Abscissen der Brennpunkte und Gränzpunkte durch die drei Gröfsen m, d, δ ausdrückt, so erhält man

$$(18.)\qquad \begin{cases} \cos\omega_1 = \sin\omega_2 = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{2d}}, \\ \sin\omega_1 = \cos\omega_2 = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{2d}}. \end{cases}$$

Weil demnach $\omega_1 = \frac{1}{2}\pi - \omega_2$ ist, und wegen der senkrechten Lage der beiden Hauptebenen gegen einander der Winkel der zweiten Fokalebene mit der zweiten Hauptebene gleich $\frac{1}{2}\pi - \omega_2$, also gleich dem Winkel ω_1 der ersten Fokalebene mit der ersten Hauptebene ist, so folgt:

Die beiden Fokalebenen eines jeden Strahls liegen symmetrisch gegen die beiden Hauptebenen desselben, in der Art, dafs die Halbirungsebenen des Winkels der beiden Fokalebenen dieselben sind, als die Halbirungsebenen des rechten Winkels, welchen die beiden Hauptebenen bilden.

Für den Winkel $\gamma = \omega_2 - \omega_1$ der beiden Fokalebenen hat man, wegen $\omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{2}\pi$:

$$(19.)\qquad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2}\pi - 2\omega_1 = 2\omega_2 - \frac{1}{2}\pi, \\ \omega_1 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\gamma, \quad \omega_2 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\gamma, \end{cases}$$

also $\sin\gamma = \cos 2\omega_1 = \cos^2\omega_1 - \sin^2\omega_1$ und $\cos\gamma = \sin 2\omega_1 = 2\sin\omega_1\cos\omega_1$; die Gleichungen (18.) geben daher:

$$(20.)\qquad \sin\gamma = \frac{\delta}{d}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2}}{d}.$$

§. 5.

Die mit einem jeden Strahlensysteme zusammenhängenden Flächen.

Die fünf bestimmten Punkte in einem jeden Strahle des Systems, nämlich die beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände, die beiden Brennpunkte und der Mittelpunkt, haben zu ihren geometrischen Orten für alle Strahlen des Systems fünf Flächen, welche durch das Strahlensystem vollkommen bestimmt sind und mit demselben in den engsten Beziehungen stehen.

Die beiden Flächen, in denen die Gränzpunkte der kürzesten Abstände liegen, stellen sich analytisch gewöhnlich nur als eine einzige Fläche dar, insofern sie beide durch eine und dieselbe Gleichung repräsentirt werden, sie können darum auch als zwei verschiedene Theile oder Schalen einer Fläche angesehen werden; da es aber durchaus nöthig ist dieselben von einander zu unterscheiden, so sollen sie in dem Folgenden überall als zwei Flächen angesehen und mit F_1 und F_2 bezeichnet werden. ***Diese beiden Flächen theilen den ganzen Raum in der Art ab, dafs zwischen denselben die***

kürzesten Abstände aller unendlich nahen Strahlen des ganzen Systems liegen, aufserhalb derselben aber keine.

Geht man von irgend einem Strahle des Systems zu demjenigen unendlich nahen Strahle über, dessen kürzester Abstand von demselben in der Fläche F_1 liegt, von diesem wieder zu dem nächsten, dessen kürzester Abstand von jenem in F_1 liegt, und so fort, so bilden alle diese auf einander folgenden Strahlen zusammen eine gradlinige Fläche O_1, deren Durchschnittscurve a_1 mit der Fläche F_1 diejenige Curve der gradlinigen Fläche O_1 ist, in welcher die kürzesten Abstände je zweier auf einander folgenden graden Linien derselben liegen. Dieselbe gradlinige Fläche O_1 schneidet auch aus der Fläche F_2 eine bestimmte Curve b_2 aus. Macht man dasselbe in Beziehung auf die Fläche F_2, so erhält man eine gradlinige Fläche O_2, für welche die kürzesten Abstände je zweier unendlich nahen graden Linien auf F_2 in einer Curve a_2 liegen, und die gradlinige Fläche O_2 schneidet auch aus F_1 eine bestimmte Curve b_1 aus. Weil alles dieses für einen jeden Strahl des Systems gilt, von dem man ausgehen will, so hat man eine ganze Schaar von gradlinigen Flächen O_1, deren Curven der kürzesten Abstände je zweier unendlich nahen graden Linien eine Schaar von Curven a_1 auf der Fläche F_1 ergeben, und welche aus der Fläche F_2 eine Schaar von Curven b_2 ausschneiden. Ebenso hat man eine zweite Schaar von gradlinigen Flächen O_2, welche auf F_2 ihre Curven a_2 der kürzesten Abstände der unendlich nahen graden Linien haben, und welche aus F_1 eine Schaar von Curven b_1 ausschneiden.

Wenn x', y', z' die Coordinaten des ersten Gränzpunktes der kürzesten Abstände für den von dem Punkte x, y, z ausgehenden Strahl sind, so hat man

$$x' = x + r_1\xi, \quad y' = y + r_1\eta, \quad z' = z + r_1\zeta$$

als Gleichungen der Fläche F_1, in der Form, dafs die Coordinaten eines jeden Punktes dieser Fläche als Functionen der beiden unabhängigen Variabeln u und v ausgedrückt sind. In derselben Weise hat man

$$x' = x + r_2\xi, \quad y' = y + r_2\eta, \quad z' = z + r_2\zeta$$

als Gleichungen der Fläche F_2. Um die Schaaren der gradlinigen Oberflächen O_1 und O_2 zu finden, mufs man die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{du} = t_1, \quad \frac{dv}{du} = t_2$$

integriren. Wenn die vollständigen, eine willkürliche Constante enthaltenden Integrale derselben gefunden sind, und man eliminirt mittelst einer dieser

beiden Integralgleichungen aus den beiden Gleichungen

$$\frac{x'-x}{\xi} = \frac{y'-y}{\eta} = \frac{z'-z}{\zeta}$$

eines jeden Strahls die Gröfsen u und v, so erhält man eine Gleichung für die Coordinaten x', y', z', welche eine willkürliche Constante enthält und die ganze Schaar der gradlinigen Flächen O_1 oder O_2 darstellt, je nachdem die eine oder die andere Integralgleichung angewendet worden ist. Die beiden Schaaren der Curven a_1 und b_1 auf F_1, und a_2 und b_2 auf F_2 erhält man unmittelbar, indem man mit den drei Gleichungen einer dieser beiden Flächen eine dieser beiden Integralgleichungen verbindet.

Die beiden Flächen, in welchen die Brennpunkte eines jeden Strahls liegen, welche die ***Brennflächen des Strahlensystems*** genannt werden und hier mit Φ_1 und Φ_2 kurz bezeichnet werden sollen, existiren als reale Flächen nur dann, wenn die Strahlen reale Brennpunkte und die beiden Wurzeln τ_1 und τ_2 der quadratischen Gleichung (5.) §. 4. reale Werthe haben.

Geht man von einem beliebigen Strahle aus zu demjenigen unendlich nahen Strahle fort, welcher jenen in dem auf Φ_1 liegenden Brennpunkte schneidet, von diesem weiter zu dem folgenden, welcher ihn in dem auf Φ_1 liegenden Brennpunkte schneidet, und so fort: so erhält man eine Reihe von Strahlen, deren jeder den vorhergehenden in einem Punkte der Fläche Φ_1 schneidet, welche also zusammen eine abwickelbare Fläche bilden, deren Wendungskurve auf der Fläche Φ_1 liegt, und welche auch aus der Fläche Φ_2 eine bestimmte Curve ausschneidet. Diese abwickelbare Fläche soll mit Ω_1, ihre Wendungscurve mit α_1 und ihre Durchschnittscurve mit der Fläche Φ_2 mit β_2 bezeichnet werden. Weil man hierbei von einem jeden beliebigen Strahle des Systems ausgehen kann, so erhält man eine ganze Schaar von abwickelbaren Flächen Ω_1, deren Wendungspunkte auf der Fläche Φ_1 eine Schaar von Curven α_1 bilden, und welche auf der Fläche Φ_2 eine Schaar von Curven β_2 bestimmen. Ebenso erhält man, von den auf der Fläche Φ_2 liegenden Brennpunkten der Strahlen ausgehend, eine zweite Schaar abwickelbarer Flächen Ω_2, deren Wendungscurven α_2 eine auf der Fläche Φ_2 liegende Schaar von Curven sind, und welche auf der Fläche Φ_1 eine Schaar von Curven β_1 bestimmen. Also:

Ein jedes System von Strahlen, welches reale Brennflächen hat, läfst sich auf zwei verschiedene Weisen zu einer Schaar abwickelbarer Flächen zusammenfassen, deren Wendungscurven zu ihren geometrischen Orten die beiden Brennflächen haben.

Weil die Wendungscurven α_1 der abwickelbaren Flächen Ω_1 als solche von allen in Ω_1 liegenden Strahlen berührt werden, und weil sie auf der Fläche Φ_1 liegen, so folgt, dafs alle Strahlen einer jeden abwickelbaren Fläche Ω_1, also überhaupt alle Strahlen des Systems, die Fläche Φ_1 berühren. Ebenso folgt auch, dafs alle Strahlen des Systems die andere Brennfläche Φ_2 berühren müssen. Man hat daher folgenden Satz:

Alle Strahlen eines Systems mit realen Brennflächen sind gemeinschaftliche Tangenten der beiden Brennflächen.

Als eine unmittelbare Folge dieses Satzes verdient auch folgender Satz erwähnt zu werden:

Ein jedes Strahlensystem mit realen Brennflächen kann als System aller gemeinschaftlichen Tangenten zweier Flächen oder auch als System aller Doppeltangenten einer und derselben Fläche geometrisch definirt werden.

Man kann auch, um ein System vollständig zu bestimmen, nur die eine seiner beiden Brennflächen, z. B. Φ_1, und zugleich die Schaar der Curven α_1 auf derselben als gegeben ansehen, also:

Ein jedes Strahlensystem mit realen Brennflächen kann als das System aller Tangenten einer auf einer Fläche liegenden Schaar von Curven geometrisch definirt werden.

Weil die in einer abwickelbaren Fläche Ω_1 liegenden Strahlen alle auch die Fläche Φ_2 berühren, so folgt, dafs die Curve β_2, welche sie mit derselben gemein haben, eine Berührungscurve beider Flächen sein mufs. Ebenso folgt, dafs jede abwickelbare Fläche Ω_2 die Fläche Φ_1 in einer ganzen Curve berührt, d. h. einhüllt. Also:

Eine jede der beiden Brennflächen wird von einer der beiden Schaaren abwickelbarer Flächen eingehüllt, in welche alle Strahlen des Systems sich zusammenfassen lassen.

Da nach einem bekannten Satze die erzeugenden graden Linien einer abwickelbaren Fläche, welche eine andere Fläche in einer ganzen Curve berührt, die conjugirten Tangenten zu den Tangenten dieser Curve sind, so folgt:

Die beiden Schaaren von Curven, welche durch die beiden Schaaren von abwickelbaren Flächen auf den Brennflächen eines Strahlensystems bestimmt werden, schneiden sich auf jeder der beiden Brennflächen in conjugirten Richtungen.

Wenn die beiden Brennflächen Φ_1 und Φ_2 sich schneiden, so ist eine jede Tangente der Durchschnittscurve einer der Strahlen des Systems und folglich eine Tangente einer der Curven α_1; die Durchschnittscurve und diese Curve α_1 haben also eine gemeinschaftliche Tangente und zwar in demselben Berührungspunkte; die Durchschnittscurve wird also von der Curve α_1 berührt, und weil dasselbe für alle verschiedenen Tangenten der Durchschnittscurve Statt hat, so folgt, dafs die Durchschnittscurve von allen Curven der Schaar α_1 berührt wird. Ebenso folgt, dafs die Durchschnittscurve auch von allen Curven der Schaar α_2 auf Φ_2 berührt wird. Man hat daher folgenden Satz:

Die Durchschnittscurve der beiden Brennflächen ist die einhüllende Curve oder Gränzcurve für alle auf den beiden Brennflächen liegenden Wendungscurven der abwickelbaren Flächen, in welche die Strahlen des Systems zusammengefafst werden können.

Die Gleichungen der beiden Brennflächen erhält man in derselben Weise, wie oben die Gleichungen der Gränzflächen der kürzesten Abstände, mit Hülfe der Abscissen der Brennpunkte ϱ_1 und ϱ_2, nämlich:

$$x' = x + \varrho_1\xi, \quad y' = y + \varrho_1\eta, \quad z' = z + \varrho_1\zeta$$

und

$$x' = x + \varrho_2\xi, \quad y' = y + \varrho_2\eta, \quad z' = z + \varrho_2\zeta.$$

Die beiden Schaaren der abwickelbaren Flächen Ω_1 und Ω_2 und die Schaaren der Curven α_1, β_1 auf Φ_1 und α_2, β_2 auf Φ_2 erhält man durch die vollständige Integration der Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{du} = \tau_1, \qquad \frac{dv}{du} = \tau_2,$$

in derselben Weise wie dies oben für die Flächen O_1 und O_2 und die Systeme der Curven a_1, b_1 auf F_1 und a_2, b_2 auf F_2 gezeigt worden ist.

Was nun endlich diejenige stets reale Fläche betrifft, auf welcher die Mittelpunkte aller Strahlen des Systems liegen, welche deshalb die *Mittelfläche* des Strahlensystems genannt werden soll, so ist dieselbe besonders in der Beziehung von Wichtigkeit, dafs sie am passendsten für diejenige Fläche gewählt werden kann, von welcher alle Strahlen des Systems als ausgehend betrachtet werden. Rechnet man nämlich die Abscissen der Punkte in den einzelnen Strahlen von der Mittelfläche aus, so hat man

$$r_1 = -r_2, \quad \varrho_1 = -\varrho_2, \quad gE - (f + f')F + eG = 0,$$

wodurch eine nicht unbeträchtliche Vereinfachung herbeigeführt wird.

Die Gleichungen der Mittelfläche erhält man aus dem Ausdrucke der Abscisse des Mittelpunkts

$$m = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{gE - (f+f')F + eG}{2\Delta^2},$$

nämlich

$$x' = x + m\xi, \quad y' = y + m\eta, \quad z' = z + m\zeta.$$

Alle diese mit den Strahlensystemen eng verbundenen Flächen, die Gränzflächen der kürzesten Abstände, die Brennflächen und die Mittelfläche können in besonderen Fällen zu Linien oder selbst zu Punkten entarten, auch können gewisse von diesen Flächen im Unendlichen verschwinden oder auch sich so mit einander vereinigen, dafs sie sich decken. Zu den verschiedenen speciellen Arten der Strahlensysteme, welche in dieser Weise als Gränzfälle der allgemeinen auftreten, gehören auch die Systeme der Normalen einer Fläche, für welche die beiden Brennflächen mit den Gränzflächen der kürzesten Abstände zusammenfallen. Von dem Verhältnisse dieser besonderen Art der Strahlensysteme zu den allgemeinen soll später ausführlicher gehandelt werden. Aufserdem verdient hier diejenige Art der Strahlensysteme eine besondere Erwähnung, für welche $\Delta = 0$ und darum $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ist, welche von der allgemeinen Untersuchung ausgeschlossen werden mufsten, weil die Ausdrücke für ξ, η, ζ durch die partiellen Differentialquotienten (27.) §. 1 für dieselben unbestimmte Werthe ergeben. Für diese besondere Art der Strahlensysteme verschwinden die Gränzflächen der kürzesten Abstände beide im Unendlichen, ebenso verschwindet auch die Mittelfläche im Unendlichen, von den beiden Brennflächen aber geht nur eine im Unendlichen verloren, während die andere eine endliche bestimmte Fläche bleibt. Von den beiden Schaaren abwickelbarer Flächen, in welche die Strahlen eines solchen Systems zusammengefafst werden können, enthält die eine, deren Wendungscurven auf der unendlich entfernten Brennfläche liegen, nur Cylinderflächen. Ein solches System kann, wie sich hieraus ergiebt, geometrisch dargestellt werden als das System aller derjenigen Tangenten einer Fläche, welche den Tangenten irgend einer auf derselben gegebenen Curve parallel sind.

§. 6.

Das Dichtigkeitsmaafs.

Betrachtet man die drei Gröfsen ξ, η, ζ, welche der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

genügen, als die rechtwinkligen Coordinaten einer Kugel, deren Radius gleich Eins ist, so hat man zu jedem Strahle des Systems einen entsprechenden Punkt auf der Kugelfläche und zu jeder continuirlichen Reihenfolge von Strahlen eine entsprechende continuirliche Curve auf der Kugelfläche. Legt man nun durch irgend einen Punkt eines Strahls eine auf demselben senkrechte Ebene und zieht in dieser Ebene eine Curve, so entspricht der Schaar von Strahlen, welche durch diese Curve hindurchgehen, eine Curve auf der Kugel. Nimmt man jene ebene Curve so, dafs ihre einzelnen Punkte sich nur unendlich wenig von dem Fufspunkte des ersten Strahls entfernen, auf welchem die Ebene der Curve senkrecht steht, und dafs sie einen um diesen Punkt herumliegenden unendlich kleinen Flächenraum umschliefst, so erhält man als die entsprechende Curve auf der Kugel ebenfalls eine geschlossene Curve mit unendlich kleinem Flächenraume. Das Verhältnifs dieser beiden unendlich kleinen Flächenräume, welches in dem Falle, wo das Strahlensystem ein System von Normalen einer Fläche und die senkrechte Ebene eine Tangentialebene derselben ist, von *Gaufs* als das Krümmungsmaafs dieser Fläche definirt worden ist, hat auch für die allgemeinsten Strahlensysteme dieselbe Wichtigkeit, zwar nicht als Maafs einer Krümmung aber als Maafs der ***Dichtigkeit*** des Strahlensystems. Das Dichtigkeitsmaafs eines Strahlensystems wird demnach folgendermaafsen definirt: Wenn durch irgend einen Punkt eines Strahls eine auf demselben senkrechte Ebene gelegt und in dieser eine dem Strahle unendlich nahe geschlossene Curve angenommen wird, deren Flächenraum gleich f ist, und der Flächenraum der entsprechenden Curve auf der Kugel gleich φ, so soll $\frac{\varphi}{f}$ ***das Dichtigkeitsmaafs des Strahlensystems in diesem Punkte*** genannt werden.

Es sei dq der unendlich kleine Abstand eines Punktes der Curve f von dem Fufspunkte des auf der Ebene dieser Curve senkrechten Strahls, welcher durch die Gröfsen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ und durch die Abscisse R gegeben ist, ferner seien $\varkappa', \lambda', \mu'$ die Cosinus der Winkel, welche dq mit den drei Coordinatenaxen bildet; es sei ferner der durch den anderen Endpunkt von dq hindurchgehende Strahl durch die Gröfsen $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$ bestimmt: so hat man nach (16.) §. 1 die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varkappa' dq = dx + Rd\xi - \xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \lambda' dq = dy + Rd\eta - \eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \mu' dq = dz + Rd\zeta - \zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz). \end{cases}$$

Es sei ferner α der Winkel, welchen dq mit einem Perpendikel auf der ersten Hauptebene macht, und darum $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ der Winkel, den es mit einem Perpendikel auf der zweiten Hauptebene macht, so ist:

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \varkappa_1 \varkappa' + \lambda_1 \lambda' + \mu_1 \mu', \\ \sin\alpha = \varkappa_2 \varkappa' + \lambda_2 \lambda' + \mu_2 \mu'. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit dq und setzt die Werthe von $\varkappa' dq$, $\lambda' dq$, $\mu' dq$ aus (1.) ein, indem man beachtet, dafs

$$\varkappa_1 \xi + \lambda_1 \eta + \mu_1 \zeta = 0,$$
$$\varkappa_2 \xi + \lambda_2 \eta + \mu_2 \zeta = 0$$

ist, so erhält man:

$$(3.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \varkappa_1 dx + \lambda_1 dy + \mu_1 dz + R(\varkappa_1 d\xi + \lambda_1 d\eta + \mu_1 d\zeta), \\ dq\sin\alpha = \varkappa_2 dx + \lambda_2 dy + \mu_2 dz + R(\varkappa_2 d\xi + \lambda_2 d\eta + \mu_2 d\zeta). \end{cases}$$

Setzt man nun für $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 und $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 ihre im §. 3, bei (5.) und (6.) gefundenen Werthe und drückt die Differentiale dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ durch die partiellen Differentialquotienten und die Differentiale du und dv der unabhängigen Variabeln aus, so erhält man:

$$(4.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = -A_2 du - B_2 dv, \\ dq\sin\alpha = +A_1 du + B_1 dv, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$A_1 = \frac{e + f' t_1 + R(E + F t_1)}{V_1}, \qquad A_2 = \frac{e + f' t_2 + R(E + F t_2)}{V_2},$$
$$B_1 = \frac{f + g t_1 + R(F + G t_1)}{V_1}, \qquad B_2 = \frac{f + g t_2 + R(F + G t_2)}{V_2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division:

$$(5.)\quad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{A_1 + B_1 t}{A_2 + B_2 t}$$

und hieraus:

$$(6.)\quad t = -\frac{A_1\cos\alpha + A_2\sin\alpha}{B_1\cos\alpha + B_2\sin\alpha}.$$

Es sei nun $d\sigma$ das dem dq entsprechende Bogenelement auf der Kugelfläche, so hat man aus den Coordinaten seiner beiden Endpunkte, welche ξ, η, ζ und $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ sind:

$$(7.)\quad d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2} = du\sqrt{E + 2Ft + Gt^2}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche das Element $d\sigma$ auf der Kugel mit den drei

Coordinatenaxen bildet, nämlich:

$$\frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \frac{d\eta}{d\sigma}, \quad \frac{d\zeta}{d\sigma},$$

sind demnach gleich

$$(8.) \quad \frac{a+a't}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \quad \frac{b+b't}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}, \quad \frac{c+c't}{\sqrt{E+2Ft+Gt^2}}.$$

Wenn nun t_0 den Werth des t für $\alpha = 0$ bezeichnet, so ist nach Gleichung (6.):

$$(9.) \quad t_0 = -\frac{A_1}{B_1},$$

und wenn der dem Winkel α entsprechende Winkel auf der Kugelfläche mit α' bezeichnet wird, so hat man aus den bekannten Richtungen seiner beiden Schenkel:

$$(10.) \quad \cos\alpha' = \frac{(a+a't_0)(a+a't)+(b+b't_0)(b+b't)+(c+c't_0)(c+c't)}{\sqrt{E+2Ft_0+Gt_0^2}\sqrt{E+2Ft+Gt^2}},$$

oder vereinfacht:

$$(11.) \quad \cos\alpha' = \frac{E+Ft_0+(F+Gt_0)t}{\sqrt{E+2Ft_0+Gt_0^2}\sqrt{E+2Ft+Gt^2}},$$

woraus man folgenden Ausdruck des $\operatorname{tang}\alpha'$ ableitet:

$$(12.) \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\Delta(t-t_0)}{E+Ft_0+(F+Gt_0)t},$$

welcher differentiirt

$$(13.) \quad d\alpha' = \frac{\Delta\, dt}{E+2Ft+Gt^2}$$

giebt, und folglich mit $d\sigma^2$ multiplicirt nach Gleichung (7.)

$$(14.) \quad d\sigma^2\, d\alpha' = \Delta\, du^2\, dt.$$

Ferner erhält man durch Differentiation der Gleichung (6.)

$$(15.) \quad dt = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\, d\alpha}{(B_1\cos\alpha + B_2\sin\alpha)^2},$$

und aus der ersten der beiden Gleichungen (4.), wenn $\frac{dv}{du} = t$ nach Gleichung (6.) durch α ausgedrückt wird:

$$(16.) \quad dq = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\, du}{B_1\cos\alpha + B_2\sin\alpha},$$

also

$$(17.) \quad dq^2\, d\alpha = (A_1B_2 - A_2B_1)\, du^2\, dt,$$

und diese Gleichung mit (14.) verbunden, giebt:

$$(18.) \quad d\sigma^2\, d\alpha' = \frac{\Delta}{A_1B_2 - A_2B_1} \cdot dq^2\, d\alpha.$$

Weil für die unendlich kleine Curve f die Linie dq der Radius Vector ist und α der zugehörige Winkel, und für die unendlich kleine Curve φ auf der Kugel $d\sigma$ der Radius Vector und α' der zugehörige Winkel, so ist:

$$(19.) \quad f = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} dq^2 d\alpha, \qquad \varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma^2 d\alpha'.$$

Die Integration der Gleichung (18.) in den Gränzen $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$, welchen dieselben Gränzen des α' entsprechen, giebt daher:

$$(20.) \quad \varphi = \frac{\Delta}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \cdot f.$$

Bezeichnet man nun das Dichtigkeitsmaafs mit Θ, so dafs $\Theta = \frac{\varphi}{f}$ ist, so hat man folgenden Ausdruck desselben:

$$(21.) \quad \Theta = \frac{\Delta}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Aus den bei (4.) gegebenen Werthen der Gröfsen A_1, B_1, A_2, B_2 erhält man

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = \frac{t_2 - t_1}{V_1 V_2}(\mathrm{eg} - \mathrm{ff}' + (\mathrm{gE} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathrm{F} + \mathrm{eG})R + \Delta^2 R^2);$$

nach den im §. 4 (10.) gefundenen Werthen der Abscissen ϱ_1 und ϱ_2 der beiden Brennpunkte ist aber:

$$\mathrm{eg} - \mathrm{ff}' = \varrho_1 \varrho_2 \Delta^2,$$
$$\mathrm{gE} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathrm{F} + \mathrm{eG} = -(\varrho_1 + \varrho_2)\Delta^2,$$

und weil nach (4.) §. 3 $V_1 V_2 = \Delta(t_2 - t_1)$ ist, so hat man:

$$(22.) \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = \Delta(\varrho_1 \varrho_2 - (\varrho_1 + \varrho_2)R + R^2).$$

Der Ausdruck des Dichtigkeitsmaafses Θ nimmt daher folgende einfache Form an:

$$(23.) \quad \Theta = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 - (\varrho_1 + \varrho_2)R + R^2}$$

oder

$$(24.) \quad \Theta = \frac{1}{(\varrho_1 - R)(\varrho_2 - R)}.$$

Das Dichtigkeitsmaafs in jedem Punkte eines Strahls ist also gleich dem reciproken Werthe des Products der Entfernungen dieses Punktes von den beiden Brennpunkten des Strahls.

Das Dichtigkeitsmaafs ist stets real, auch wenn die beiden Brennpunkte imaginär sind. Für Strahlensysteme mit realen Brennflächen ist das Dichtigkeitsmaafs positiv für alle aufserhalb der beiden Brennflächen liegenden Punkte, negativ für die zwischen denselben liegenden, und es hat, wie aus

dem Ausdrucke desselben leicht zu ersehen ist, in dem Mittelpunkte eines jeden Strahls seinen gröfsten negativen Werth, in den Brennpunkten aber ist es unendlich grofs. In den Strahlensystemen mit imaginären Brennflächen ist das Dichtigkeitsmaafs stets positiv, und hat in dem Mittelpunkte eines jeden Strahls sein Maximum.

Fafst man alle diejenigen einem gegebenen Strahle unendlich nahen Strahlen zusammen, welche durch die mit f bezeichnete auf dem Strahle senkrecht stehende unendlich kleine Fläche hindurchgehen, so bilden dieselben ein unendlich dünnes ***Strahlenbündel***, welches von derjenigen gradlinigen Fläche begränzt ist, deren erzeugende grade Linien die durch die umgränzende Curve der Fläche f hindurchgehenden Strahlen sind. Die unendlich kleine Fläche f ist ein ***Querschnitt*** dieses unendlich dünnen Strahlenbündels, und zwar der zur Abscisse R gehörende Querschnitt. Betrachtet man nun einen zweiten senkrechten Querschnitt f', dessen Abscisse gleich R' ist, so gehört zu diesem genau dieselbe entsprechende unendlich kleine Fläche φ auf der Kugelfläche, welche zu f gehört, weil alle Strahlen, welche durch die umgränzende Curve von f gehen, auch durch die umgränzende Curve von f' gehen. Man hat daher, wenn das Dichtigkeitsmaafs in dem Punkte, dessen Abscisse R' ist, mit Θ' bezeichnet wird:

$$\frac{\varphi}{f'} = \Theta', \qquad \frac{\varphi}{f} = \Theta$$

und folglich

$$(25.) \qquad \frac{f}{f'} = \frac{\Theta'}{\Theta}.$$

Also: ***Die Flächeninhalte zweier Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels verhalten sich umgekehrt wie die Dichtigkeitsmaafse in diesen Stellen des Strahlenbündels.***

Betrachtet man nicht blofs die Dichtigkeitsmaafse, sondern auch die Dichtigkeiten selbst, welche die Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels in den verschiedenen Stellen haben, so ist klar, dafs dieselben in dem umgekehrten Verhältnifs der Flächeninhalte der Querschnitte des Strahlenbündels stehen müssen; denn alle in dem Strahlenbündel enthaltenen Strahlen breiten sich in den Querschnitten über die ganzen Flächen derselben aus und müssen darum in demselben Verhältnifs dichter sein, in welchem die Querschnitte kleiner sind. Hieraus folgt, ***dafs in einem und demselben unendlich dünnen Strahlenbündel die Dichtigkeiten in den verschiedenen***

Stellen sich wie die zugehörenden Dichtigkeitsmaafse verhalten. Die Benennung „Dichtigkeitsmaafs" wird hierdurch vollständig gerechtfertigt.

Für zwei in ***verschiedenen*** Strahlen oder unendlich dünnen Strahlenbündeln liegende Punkte ist das Verhältnifs der Dichtigkeiten der Strahlen nicht nothwendig dasselbe als das Verhältnifs der Dichtigkeitsmaafse. Man erkennt dies am deutlichsten an dem einfachsten Systeme, in welchem alle Strahlen von einem und demselben Punkte ausgehen, welches so beschaffen sein kann, dafs die Strahlen nach allen verschiedenen Richtungen in gleicher Dichtigkeit gehen, oder auch so, dafs die Dichtigkeit eine Function der Richtung ist. In dem ersten Falle ist die Dichtigkeit für alle vom Ausgangspunkte gleich weit entfernten Punkte dieselbe und darum überall dem Dichtigkeitsmaafse proportional, im zweiten Falle aber ist die Dichtigkeit nicht allein von der Entfernung vom Ausgangspunkte sondern auch von jener Function der Richtung abhängig. Im Allgemeinen, wenn das Strahlensystem, wie dies oben angenommen worden ist, so bestimmt wird, dafs von jedem Punkte einer als geometrischer Ort der Ausgangspunkte aller Strahlen gewählten Fläche ein Strahl nach einer bestimmten Richtung ausgeht, so kann die Dichtigkeit der Strahlen an dieser ganzen Fläche irgend wie bestimmt sein als eine Function der Coordinaten des Ausgangspunktes x, y, z, oder was dasselbe ist, als eine Function der beiden unabhängigen Variabeln u und v, und erst durch diese Bestimmung wird die Dichtigkeit der Strahlen in allen Punkten des ganzen Systems zu einer vollständig bestimmten. Die Dichtigkeit selbst ist darum gleich dem Dichtigkeitsmaafse multiplicirt mit einer Function von u und v, welche die Abscisse R nicht enthält und deshalb für alle verschiedenen Punkte eines Strahls dieselbe ist. Wenn diese Function eine Constante, und folglich die Dichtigkeit in allen Punkten des Systems dem Dichtigkeitsmaafse proportional ist, so kann das Strahlensystem in Beziehung auf die Dichtigkeit der Strahlen als ein ***homogenes*** bezeichnet werden.

Alle diejenigen Punkte in den verschiedenen Strahlen eines Systems, welche denselben bestimmten Werth des Dichtigkeitsmaafses haben, liegen auf einer bestimmten Fläche, welche eine ***Fläche gleichen Dichtigkeitsmaafses*** genannt werden soll. Weil man dem Dichtigkeitsmaafse alle möglichen constanten Werthe geben kann, so folgt, dafs es in einem jeden Strahlensysteme eine ganze Schaar von Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses giebt. Alle diese Flächen werden sehr einfach durch den bei (23.) gege-

benen Ausdruck des Dichtigkeitsmaafses bestimmt, nach welchem

$$R^2 - (\varrho_1 + \varrho_2) R + \varrho_1 \varrho_2 = \frac{1}{\Theta}$$

ist. Nimmt man Θ constant und löst diese quadratische Gleichung in Beziehung auf R auf, wodurch man

$$(26.) \qquad R = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Theta}}$$

erhält, so sind für diese beiden Werthe des R

$$(27.) \qquad x' = x + R\xi, \quad y' = y + R\eta, \quad z' = z + R\zeta$$

die Coordinaten aller derjenigen Punkte des Systems, deren Dichtigkeitsmaafs den constanten Werth Θ hat; dieselben geben also die Gleichungen der Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses in der Art, dafs die Coordinaten eines jeden Punkts dieser Flächen als Functionen der zwei unabhängigen Variabeln u und v bestimmt sind. Damit diese Flächen real seien, ist nöthig und hinreichend, dafs der constante Werth von $\frac{1}{\Theta}$ in den Gränzen $-\left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2$ und $+\infty$ liege. Für den Werth $\Theta = \infty$ wird R nur dann real, wenn die beiden Brennpunkte real sind, und es wird $R = \varrho_1$ oder $R = \varrho_2$, woraus folgt, dafs die beiden Brennflächen zu den Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses gehören, welches in denselben unendlich grofs ist.

Wenn die beiden Brennflächen real und gegeben sind, so dafs alle Strahlen des Systems als die gemeinschaftlichen Tangenten derselben betrachtet werden können, so kann man alle Flächen gleichen Dichtigkeitsmaafses sehr leicht construiren, indem man zu den beiden Berührungspunkten eines jeden Strahls, welche die Brennpunkte desselben sind, einen dritten Punkt construirt, dessen Entfernungen von den beiden Berührungspunkten ein constantes Product haben. Wenn der gegebene Werth dieses Products positiv ist, so mufs dieser Punkt aufserhalb, wenn negativ, innerhalb der beiden Brennpunkte genommen werden.

§. 7.

Die Drehungswinkel der unendlich nahen Strahlen.

Wenn zwei grade Linien im Raume gegeben sind, und man fällt von zwei verschiedenen Punkten der zweiten Linie Perpendikel auf die erste Linie, deren Fufspunkte auf derselben in a und b liegen mögen, so soll der Winkel, welchen diese beiden Perpendikel gegen einander bilden, der *Dre-*

hungswinkel der zweiten Linie um die erste für die Strecke von a bis b genannt werden. Der Drehungswinkel für die ganze unendliche Länge der ersten Linie ist nach dieser Definition gleich zwei Rechten, die Drehungswinkel für endliche Strecken sind alle kleiner als zwei Rechte. Wenn die beiden graden Linien in einer Ebene liegen, so ist ihr Drehungswinkel für jede beliebige Strecke gleich Null oder gleich zwei Rechten, je nachdem diese Strecke den Durchschnittspunkt der beiden Linien in sich enthält oder nicht. Wenn a, b, c drei Punkte in der ersten graden Linie sind, so ist der Drehungswinkel von b bis c gleich dem Unterschiede der beiden Drehungswinkel von a bis c und von a bis b, also alle Drehungswinkel für beliebig begränzte Strecken der ersten Linie sind durch die von einem bestimmten Punkte aus gerechneten Drehungswinkel gegeben.

Um nun die Drehungen zu untersuchen, welche die einem bestimmten Strahle unendlich nahen Strahlen des Systems in Beziehung auf denselben machen, sollen die Drehungswinkel vom Ausgangspunkte dieses Strahls aus gerechnet werden, dessen Abscisse gleich Null ist. Es sei dq die Länge eines von einem unendlich nahen Strahle auf den gegebenen Strahl gefällten Perpendikels, welches denselben in dem Punkte trifft, dessen Abscisse R ist, und α der Winkel, welchen dieses Perpendikel mit einem auf der ersten Hauptebene errichteten Perpendikel macht; ferner sei dq_0 die Länge und α_0 der entsprechende Winkel desjenigen Perpendikels, welches den gegebenen Strahl im Ausgangspunkte trifft, dessen Abscisse gleich Null ist, so hat man, wie im §. 6 bei (4.) gezeigt worden ist, die Gleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} dq\cos\alpha = -A_2\,du - B_2\,dv, \\ dq\sin\alpha = +A_1\,du + B_1\,dv, \end{cases}$$

wo

$$A_1 = \frac{e+f't_1+R(E+Ft_1)}{V_1}, \qquad A_2 = \frac{e+f't_2+R(E+Ft_2)}{V_2},$$

$$B_1 = \frac{f+gt_1+R(F+Gt_1)}{V_1}, \qquad B_2 = \frac{f+gt_2+R(F+Gt_2)}{V_2},$$

und darum für $R=0$:

$$(2.)\qquad \begin{cases} dq_0\cos\alpha_0 = -\frac{e+f't_2}{V_2}\,du - \frac{f+gt_2}{V_2}\,dv, \\ dq_0\sin\alpha_0 = +\frac{e+f't_1}{V_1}\,du + \frac{f+gt_1}{V_1}\,dv, \end{cases}$$

und folglich:

$$(3.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0 = -\dfrac{R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_2)}{V_2}du - \dfrac{R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_2)}{V_2}dv, \\ dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0 = +\dfrac{R(\mathrm{E}+\mathrm{F}t_1)}{V_1}du + \dfrac{R(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)}{V_1}dv. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man folgende Werthe der Differentiale du und dv:

$$(4.)\quad \begin{cases} du = \dfrac{dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0}{RV_1} - \dfrac{dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0}{RV_2}, \\ dv = \dfrac{(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0)t_1}{RV_1} - \dfrac{(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0)t_2}{RV_2}, \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in die beiden Gleichungen (2.) einsetzt, indem man beachtet, dafs

$$\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_1+\mathrm{g}t_1^2 = -r_1V_1^2, \qquad \mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_2+\mathrm{g}t_2^2 = -r_2V_2^2,$$
$$\mathrm{e}+\tfrac{1}{2}(\mathrm{f}+\mathrm{f}')(t_1+t_2)+\mathrm{g}t_1t_2 = 0, \qquad V_1V_2 = \Delta(t_2-t_1)$$

ist, so erhält man

$$(5.)\quad \begin{cases} Rdq_0\cos\alpha_0 = -r_2(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0) + \left(\dfrac{\mathrm{f}-\mathrm{f}'}{2\Delta}\right)(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0), \\ Rdq_0\sin\alpha_0 = -\left(\dfrac{\mathrm{f}-\mathrm{f}'}{2\Delta}\right)(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0) - r_1(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0), \end{cases}$$

und weil nach (15.) §. 4.

$$\left(\frac{\mathrm{f}-\mathrm{f}'}{2\Delta}\right)^2 = d^2-\delta^2 = \varrho_1\varrho_2 - r_1r_2$$

ist, so erhält man hieraus folgende Ausdrücke von $dq\cos\alpha$ und $dq\sin\alpha$:

$$(6.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \left(1-\dfrac{Rr_1}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\cos\alpha_0 - \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\sin\alpha_0, \\ dq\sin\alpha = \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\cos\alpha_0 + \left(1-\dfrac{Rr_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\sin\alpha_0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen, welche zeigen, wie das Perpendikel dq und der zugehörige Winkel α für einen jeden Punkt eines Strahls durch die entsprechenden Stücke im Ausgangspunkte desselben bestimmt werden, geben durch einander dividirt:

$$(7.)\quad \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{R\sqrt{d^2-\delta^2}\cos\alpha_0 + (\varrho_1\varrho_2 - Rr_2)\sin\alpha_0}{(\varrho_1\varrho_2 - Rr_1)\cos\alpha_0 - R\sqrt{d^2-\delta^2}\sin\alpha_0}.$$

Der Drehungswinkel des unendlich nahen Strahls um den ersten Strahl für die Strecke der Abscisse R ist, wie oben gezeigt worden, gleich $\alpha-\alpha_0$;

bezeichnet man denselben mit β, so dafs $\beta = \alpha - \alpha_0$ und $\alpha = \beta + \alpha_0$ ist, so erhält man aus der Gleichung (7.) für den Drehungswinkel folgenden Ausdruck:

$$(8.) \qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{R(\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0)}{\varrho_1\varrho_2 - R(r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0)}.$$

Die Tangente des Drehungswinkels ist, wie hieraus folgt, für jeden beliebigen Werth der Abscisse R gleich Null, also der Drehungswinkel selbst gleich Null oder gleich zwei Rechten, wenn

$$(9.) \qquad \sqrt{d^2-\delta^2} = d\sin 2\alpha_0$$

ist, also nach (20.) §. 4, wenn $\sin 2\alpha_0 = \cos\gamma$ ist oder $\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{2}\gamma$, das ist $\alpha_0 = \omega_1$ oder $\alpha_0 = \omega_2$, wo ω_1 und ω_2 die Winkel sind, welche die beiden Fokalebenen mit der ersten Hauptebene bilden. Also für die beiden unendlich nahen Strahlen, welche in den Fokalebenen liegen, ist der Drehungswinkel überall gleich Null oder gleich zwei Rechten. Dasselbe folgt unmittelbar auch daraus, dafs jeder dieser beiden unendlich nahen Strahlen mit dem ersten Strahle in einer und derselben Ebene, der Fokalebene, liegt.

In denjenigen Strahlensystemen, welche imaginäre Brennflächen und darum auch keine Fokalebenen haben, kann der Drehungswinkel für endliche Strecken niemals gleich Null werden, also die Drehung der Strahlen um einander niemals ihren Sinn ändern. Wenn irgend zwei unendlich nahe Strahlen eines solchen Systems so liegen, dafs die Drehung des einen um den andern als eine Rechtsdrehung bezeichnet werden kann, so müssen je zwei einander unendlich nahe Strahlen des ganzen Systems nothwendig in demselben Verhältnisse der Rechtsdrehung zu einander stehen. Die Strahlensysteme mit imaginären Brennflächen theilen sich also in zwei gesonderte Klassen, als Strahlensysteme mit Rechtsdrehung und Strahlensysteme mit Linksdrehung aller Strahlen gegen einander. Zu jedem Strahlensysteme aber, es möge reale oder imaginäre Brennflächen haben, giebt es ein anderes, welches demselben in der Art symmetrisch oder uneigentlich äquivalent ist, dafs der einzige Unterschied nur in dem entgegengesetzten Sinne der Drehung aller Strahlen gegen einander besteht, welcher Unterschied analytisch sich nur durch die Verschiedenheit der Vorzeichen vor den Quadratwurzeln ausdrückt.

Wenn die Brennpunkte real sind, und man untersucht die Drehungswinkel vom Ausgangspunkte eines Strahls bis zu den Brennpunkten, also für $R = \varrho_1$ und $R = \varrho_2$, welche beziehungsweise mit β_1 und β_2 bezeichnet werden mögen, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (14.) §. 4, aus welchen

$r_1 \cos^2 \alpha_0 + r_2 \sin^2 \alpha_0 = m - d \cos 2\alpha_0$ folgt,

$$(10.) \qquad \operatorname{tang} \beta_1 = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2} - d \sin 2\alpha_0}{\delta + d \cos 2\alpha_0}, \qquad \operatorname{tang} \beta_2 = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2} - d \sin 2\alpha_0}{-\delta + d \cos 2\alpha_0},$$

und hieraus mit Hülfe der bei (18.) §. 4 gegebenen Ausdrücke der Winkel ω_1 und ω_2, welche die Fokalebenen mit den Hauptebenen machen,

$$(11.) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} \beta_1 = \dfrac{\sin 2\omega_1 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_1 - \cos 2\alpha_0} = \operatorname{tang} (\omega_1 - \alpha_0), \\ \operatorname{tang} \beta_2 = \dfrac{\sin 2\omega_2 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_2 - \cos 2\alpha_0} = \operatorname{tang} (\omega_2 - \alpha_0); \end{cases}$$

es ist also:

$$(12.) \qquad \beta_1 = \omega_1 - \alpha_0, \qquad \beta_2 = \omega_2 - \alpha_0.$$

Aus diesen einfachen Ausdrücken der von dem Ausgangspunkte eines Strahls bis zu den Brennpunkten gerechneten Drehungswinkel seiner unendlich nahen Strahlen erhält man:

$$(13.) \qquad \beta_2 - \beta_1 = \omega_2 - \omega_1 = \gamma.$$

Also: ***Die Drehungswinkel von einem Brennpunkte eines Strahls bis zu dem anderen Brennpunkte haben für alle unendlich nahen Strahlen denselben Werth und sind dem Neigungswinkel der beiden Fokalebenen gleich.***

Nimmt man den Drehungswinkel β als eine gegebene Gröfse, so kann man die Länge der Abscisse R bestimmen, für welche der Drehungswinkel eines dem ersten Strahle unendlich nahen Strahls diese gegebene Gröfse hat. Die Gleichung (8.) giebt für R folgenden Ausdruck:

$$(14.) \qquad R = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin \beta}{(r_1 \cos^2 \alpha_0 + r_2 \sin^2 \alpha_0) \sin \beta + \sqrt{d^2 - \delta^2} \cos \beta - d \sin 2\alpha_0 \cos \beta},$$

welcher, wenn für r_1 und r_2 ihre Werthe $r_1 = m - d$ und $r_2 = m + d$ gesetzt werden, folgende einfachere Gestalt annimmt:

$$(15.) \qquad R = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \sin \beta}{m \sin \beta + \sqrt{d^2 - \delta^2} \cos \beta - d \sin (2\alpha_0 + \beta)}.$$

Betrachtet man nun R als eine Function von α_0 allein und β als eine gegebene constante Gröfse, so erhält R seinen gröfsten Werth für $\sin (2\alpha_0 + \beta) = +1$, also $\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta$, und seinen kleinsten Werth für $\sin (2\alpha_0 + \beta) = -1$, also $\alpha_0 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta$, und wenn der gröfste Werth des R mit R_1, der kleinste mit R_2 bezeichnet wird, so hat man:

$$(16.)\quad \begin{cases} R_1 = \dfrac{\varrho_1\varrho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d}, \\ R_2 = \dfrac{\varrho_1\varrho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta + d}. \end{cases}$$

Hieraus folgt weiter:

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{(1-\sin(2\alpha_0+\beta))\,d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta} = \dfrac{2\sin^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)\,d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta}, \\ \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R} = \dfrac{(1+\sin(2\alpha_0+\beta))\,d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta} = \dfrac{2\cos^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)\,d}{\varrho_1\varrho_2\sin\beta}, \end{cases}$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$(18.)\quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)}{R_1} + \frac{\sin^2(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi)}{R_2}.$$

Also: Wenn man von einem beliebigen Punkte eines Strahls ausgehend jeden demselben unendlich nahe liegenden Strahl in *der* Länge nimmt, in welcher er mit diesem einen gegebenen constanten Drehungswinkel macht, so wird diese Länge eines jeden unendlich nahen Strahls aus der Länge des gröfsten und des kleinsten und aus dem Winkel, welchen die Richtung seines Ausgangspunktes mit der Richtung des Ausgangspunktes des gröfsten Strahls macht, genau durch dieselbe Gleichung bestimmt, wie der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes einer Fläche durch den gröfsten und den kleinsten Krümmungshalbmesser und durch den Winkel, den dieser Normalschnitt mit einem der Hauptschnitte bildet, in der bekannten *Euler*schen Gleichung bestimmt ist. Der *Euler*sche Satz selbst ist als ein specieller Fall in diesem allgemeinen Satze enthalten, wie unten näher gezeigt werden soll. In dem speciellen Falle, wo der constante Drehungswinkel β gleich einem Rechten ist, hat man

$$(19.)\quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha_0}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha_0}{R_2}.$$

Die in dieser Gleichung ausgedrückte speciellere Eigenschaft der allgemeinen Strahlensysteme hat *Hamilton* in dem erwähnten Supplemente zuerst nachgewiesen, und zwar durch die Betrachtung der Projection eines, einem gegebenen Strahle unendlich nahen Strahls auf eine Ebene, welche durch den ersten Strahl und durch den Ausgangspunkt des unendlich nahen Strahls gelegt wird. Den für die Erkenntnifs der Eigenschaften der Strahlensysteme ausserordentlich fruchtbaren Begriff der Drehung der Strahlen in Beziehung auf einander und des Drehungswinkels, hat *Hamilton* aber überhaupt nicht in Anwendung gebracht.

§. 8.

Die unendlich dünnen Strahlenbündel und die Hauptstrahlen.

In den beiden Gleichungen (6.) §. 7:

$$(1.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \left(1-\dfrac{Rr_1}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\cos\alpha_0 - \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\sin\alpha_0, \\ dq\sin\alpha = \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}dq_0\cos\alpha_0 + \left(1-\dfrac{Rr_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)dq_0\sin\alpha_0 \end{cases}$$

können dq und α als die Polarcoordinaten der umgränzenden Curve desjenigen Querschnitts eines unendlich dünnen Strahlenbündels angesehen werden, welcher zur Abscisse R gehört, und dq_0 und α_0 als die Polarcoordinaten der Curve des im Ausgangspunkte befindlichen Querschnitts. Diese Gleichungen können darum dazu benutzt werden, die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels nicht nur dem Flächeninhalte nach mit einander zu vergleichen, was schon durch das Dichtigkeitsmaafs vollständig geleistet wird, sondern auch zu bestimmen, wie die Gestalt eines jeden Querschnitts von der eines einzigen gegebenen abhängig ist. Geht man von den Polarcoordinaten der beiden Querschnitte zu rechtwinkligen Coordinaten über, deren Axen in den beiden Hauptebenen des Strahls liegen, in Beziehung auf welchen alle anderen Strahlen des Strahlenbündels als unendlich nahe Strahlen aufgefafst werden, so hat man

$$(2.)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = x, & dq\sin\alpha = y, \\ dq_0\cos\alpha_0 = x_0, & dq_0\sin\alpha_0 = y_0 \end{cases}$$

zu setzen, wo x, y und x_0, y_0 die unendlich kleinen Coordinaten der beiden Querschnitte sind. Die Gleichungen (1.) geben alsdann:

$$(3.)\quad \begin{cases} x = \left(1-\dfrac{Rr_1}{\varrho_1\varrho_2}\right)x_0 - \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}y_0, \\ y = \dfrac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}x_0 + \left(1-\dfrac{Rr_2}{\varrho_1\varrho_2}\right)y_0, \end{cases}$$

und wenn umgekehrt x_0 und y_0 durch x und y ausgedrückt werden:

$$(4.)\quad \begin{cases} (\varrho_1-R)(\varrho_2-R)x_0 = (\varrho_1\varrho_2-Rr_2)x + R\sqrt{d^2-\delta^2}y, \\ (\varrho_1-R)(\varrho_2-R)y_0 = -R\sqrt{d^2-\delta^2}x + (\varrho_1\varrho_2-Rr_1)y. \end{cases}$$

Die umgränzenden Curven der Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels sind also nicht nur sämmtlich Curven desselben Grades, sondern stehen auch in dem durch diese Gleichungen ausgedrückten Verhältnisse der Collinearität zu einander.

Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen die Querschnitte in den beiden Brennpunkten des unendlich dünnen Strahlenbündels, für welche, wie schon oben gezeigt worden, das Dichtigkeitsmaafs unendlich grofs ist, also die Flächeninhalte unendlich klein einer höheren Ordnung werden. Nimmt man $\boldsymbol{R} = \varrho_1$ oder $\boldsymbol{R} = \varrho_2$, so wird von den beiden Gleichungen (4.) und darum auch von den Gleichungen (3.), die eine mit der andern identisch, und sie geben

$$(5.)\quad \begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{d+\delta}}\, x, & \text{für } \boldsymbol{R} = \varrho_1, \\ y = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{d-\delta}}\, x, & \text{für } \boldsymbol{R} = \varrho_2, \end{cases}$$

welches die Gleichungen grader Linien sind und zwar unendlich kleiner grader Linien, weil y und x nur unendlich kleine Werthe haben dürfen.

Die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels in den beiden Brennpunkten sind also unendlich kleine grade Linien, d. h. von den beiden Dimensionen der Querschnitte, welche im allgemeinen unendlich kleine Gröfsen der ersten Ordnung sind, wird in den beiden Brennpunkten die eine eine unendlich kleine Gröfse einer höheren Ordnung.

Hieraus folgt auch, ***dafs die umgränzende Fläche eines jeden unendlich dünnen Strahlenbündels mit realen Brennpunkten durch Bewegung einer graden Linie construirt werden kann, welche stets durch eine unendlich kleine ebene Curve und durch zwei grade Linien hindurchgeht, die auf einem im Innern der kleinen Curve auf der Ebene desselben errichteten Perpendikel senkrecht stehen.***

Um die Richtungen der beiden Querschnitte in den Brennpunkten, welche unendlich kleine Linien sind, und um die Längen derselben im Verhältnifs zu den Dimensionen des im Ausgangspunkte des Strahlenbündels gegebenen Querschnitts zu bestimmen, ist es zweckmäfsiger zu den Polarcoordinaten dq, α und dq_0, α_0 zurückzukehren. Setzt man in den Gleichungen (1.) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1$ und beachtet, dafs $\varrho_2 - \boldsymbol{r}_1 = d + \delta$, $\varrho_2 - \boldsymbol{r}_2 = -d + \delta$ ist, so erhält man für den Querschnitt im ersten Brennpunkte:

$$(6.)\quad \begin{cases} \varrho_2\, dq \cos\alpha = (d+\delta)\, dq_0 \cos\alpha_0 - \sqrt{d^2-\delta^2}\, dq_0 \sin\alpha_0, \\ \varrho_2\, dq \sin\alpha = \sqrt{d^2-\delta^2}\, dq_0 \cos\alpha_0 - (d-\delta)\, dq_0 \sin\alpha_0. \end{cases}$$

Durch Einführung des Winkels ω_1, welchen die erste Fokalebene mit der

ersten Hauptebene macht, für welchen, wie oben bei (18.) §. 4 gezeigt worden,

$$\sin\omega_1 = \sqrt{\frac{d-\delta}{2d}}, \qquad \cos\omega_1 = \sqrt{\frac{d+\delta}{2d}}$$

ist, können diese Gleichungen in folgender einfacheren Form dargestellt werden:

$$(7.) \quad \begin{cases} \varrho_2\, dq \cos\alpha &= 2d\cos\omega_1 \cos(\alpha_0 + \omega_1)\, dq_0, \\ \varrho_2\, dq \sin\alpha &= 2d\sin\omega_1 \cos(\alpha_0 + \omega_1)\, dq_0, \end{cases}$$

und man erhält durch Division derselben:

$$(8.) \quad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_1, \qquad \alpha = \omega_1.$$

Daraus, dafs der Winkel α einen constanten Werth hat, kann man ebenfalls schliefsen, dafs der Querschnitt, dessen Polarcoordinaten dq und α sind, ein Theil einer graden Linie sein mufs, in welcher der Pol liegt, man hat aber in diesem constanten Werthe $\alpha = \omega_1$ zugleich die Richtung dieser graden Linie gegeben, da sie mit der ersten Hauptebene den Winkel ω_1 macht.

Für $R = \varrho_2$, also für den Querschnitt im zweiten Brennpunkte erhält man in derselben Weise:

$$(9.) \quad \begin{cases} \varrho_1\, dq \cos\alpha &= 2d\cos\omega_2 \cos(\alpha_0 + \omega_2)\, dq_0, \\ \varrho_1\, dq \sin\alpha &= 2d\sin\omega_2 \cos(\alpha_0 + \omega_2)\, dq_0, \end{cases}$$

$$(10.) \quad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_2, \qquad \alpha = \omega_2.$$

Man hat demnach folgenden Satz:

Die beiden unendlich kleinen graden Linien, welche die Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels in den Brennpunkten bilden, liegen in den beiden Fokalebenen desselben.

Für den Querschnitt im ersten Brennpunkte, wo $\alpha = \omega_1$ ist, hat man nach Gleichung (7.):

$$(11.) \quad dq = \frac{2d}{\varrho_2}\, dq_0 \cos(\alpha_0 + \omega_1).$$

Wenn nun, wie hier vorausgesetzt wird, die umgränzende Curve des einen Querschnitts im Ausgangspunkte des Strahlenbündels vollständig bestimmt und gegeben ist, so hat man den Radius Vector dq_0 derselben als eine Function des Winkels α_0 gegeben, und es ist alsdann durch die Gleichung (11.) auch dq als Function von α_0 bestimmt. Da aber die Curve, deren Radius Vector dq ist, eine grade Linie ist, und der Pol in dieser graden Linie liegt, so ist die Länge derselben nothwendig gleich dem Unterschiede der beiden äufser-

sten Werthe, welche dieser Radius Vector dq als Function von α_0 haben kann, oder weil der eine dieser beiden äufsersten Werthe nothwendig positiv, der andere negativ sein mufs, so ist die gesuchte Länge dieser graden Linie gleich der Summe der absoluten Werthe dieses Maximum und Minimum. Ebenso erhält man die Länge des Querschnitts im zweiten Brennpunkte, indem man den gröfsten positiven und den gröfsten negativen Werth, welchen dq nach der Gleichung

$$(12.) \qquad dq = \frac{2d}{\varrho_1} dq_0 \cos(\alpha_0 + \omega_2)$$

als Function von α_0 erhalten kann, abgesehen von den Vorzeichen, addirt.

In dem einfachsten Falle, wo der Querschnitt im Ausgangspunkte als ein unendlich kleiner Kreis angenommen wird, also dq_0 als Radius dieses Kreises constant ist, hat man die beiden äufsersten Werthe des dq für den Querschnitt im ersten Brennpunkte, wenn $\alpha_0 + \omega_1 = 0$ und $\alpha_0 + \omega_1 = \pi$ ist, also gleich $\frac{2d}{\varrho_2} dq_0$ und $-\frac{2d}{\varrho_2} dq_0$; dieselben, abgesehen von den Vorzeichen addirt, geben $\frac{4d}{\varrho_2} dq_0$ als Länge des gradlinigen Querschnitts im ersten Brennpunkte. Ebenso findet man die Länge des Querschnitts im zweiten Brennpunkte gleich $\frac{4d}{\varrho_1} dq_0$. Die Längen dieser beiden Querschnitte in den Brennpunkten verhalten sich also wie ihre Entfernungen von dem kreisförmigen Querschnitte im Ausgangspunkte des Strahlenbündels.

Untersucht man die Bedingung, dafs die Länge eines Querschnitts im Brennpunkte des Strahlenbündels gleich Null ist, d. h. unendlich klein einer höheren Ordnung als der ersten, so erkennt man aus den Gleichungen (11.) und (12.) unmittelbar, dafs dieser Fall eintritt, wenn $d = 0$ ist, und dafs er nur dann eintreten kann, wenn diese Bedingung erfüllt ist. Die Bedingung $d = 0$ zieht nothwendig auch $\delta = 0$ nach sich, weil δ, wenn es real ist, niemals gröfser ist als d, es mufs also $r_2 = r_1$ sein und $\varrho_2 = \varrho_1$, d. h. die beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände und die beiden Brennpunkte müssen für solche Strahlenbündel mit dem einen Mittelpunkte desselben zusammenfallen. Nennt man nach ***Hamilton*** diejenigen Strahlen, deren unendlich nahe Strahlen alle durch einen einzigen Punkt gehen, ***Hauptstrahlen,*** so folgt, dafs Hauptstrahlen nur da Statt haben können und auch wirklich Statt haben, wo die beiden Gränzflächen und mit ihnen zugleich die beiden Brennflächen gemeinschaftliche Punkte haben, welche entweder Berührungspunkte oder Durchschnittspunkte oder Punkte auf Durchschnittslinien sein können.

Für die Hauptstrahlen sind die beiden Hauptebenen unbestimmt, weil für sie die kürzesten Abstände von den unendlich nahen Strahlen alle gleich Null sind und darum keine bestimmten Richtungen ergeben.

In dem ganz speciellen Strahlensysteme, dessen Strahlen alle durch einen einzigen Punkt gehen, sind alle Strahlen Hauptstrahlen; auch ist leicht einzusehen, dafs dies das einzige derartige System ist. Es giebt aber unendlich viele Strahlensysteme, welche continuirliche, zusammen eine Fläche bildende Reihenfolgen von Hauptstrahlen haben, wie z. B. das System der gemeinschaftlichen Tangenten zweier confokalen Flächen zweiten Grades, in welchem alle Tangenten der Durchschnittscurve dieser beiden confokalen Flächen Hauptstrahlen sind. Ebenso giebt es unendlich viele Strahlensysteme, welche einzelne isolirte Hauptstrahlen haben, in der Regel aber kommen die Hauptstrahlen in den allgemeinen Systemen nicht vor, weil die Werthe der beiden unabhängigen Variabeln u und v, für welche ein Strahl zu einem Hauptstrahle wird, durch drei Gleichungen bestimmt werden. Da nämlich für einen Hauptstrahl die Richtung der beiden Hauptebenen unbestimmt ist, so mufs die quadratische Gleichung (4.) §. 2, deren Wurzeln die Richtungen der Hauptebenen bestimmen, identisch erfüllt sein, es mufs also gleichzeitig

$$(13.)\quad gF - \tfrac{1}{2}(f+f')G = 0, \qquad eG - gE = 0, \qquad \tfrac{1}{2}(f+f')E - eF = 0$$

sein. Diese drei Gleichungen reduciren sich im allgemeinen auf zwei, weil, abgesehen von dem Falle $F = 0$, eine derselben eine nothwendige Folge der beiden andern ist; es kommt aber noch eine dritte Bedingungsgleichung hinzu, weil der Strahl einen *realen* Brennpunkt haben mufs, nämlich $\delta = 0$, welche

$$(14.)\quad f = f'$$

ergiebt.

Wenn in einem Strahle nur die beiden Brennpunkte, aber nicht zugleich auch die beiden Gränzpunkte der kürzesten Abstände, sich mit dem Mittelpunkte vereinigen, so hat das ihn umgebende unendlich dünne Strahlenbündel nur *einen* gradlinigen Querschnitt in diesem Mittelpunkte, welcher zugleich die beiden Brennpunkte enthält, und dieser Querschnitt liegt in der Ebene, in welcher die beiden Fokalebenen sich in diesem Falle vereinigen, da vermöge der Gleichung $\sin\gamma = \frac{\delta}{d}$ der Winkel derselben γ zugleich mit δ, dem halben Abstande der beiden Brennpunkte, gleich Null wird. Weil die Bedingung, dafs die beiden Brennpunkte zusammenfallen, nur eine einzige Gleichung unter den beiden unabhängigen Variabeln u und v giebt, so folgt,

dafs die Strahlensysteme in der Regel nicht einzelne Strahlen dieser Art, sondern continuirliche Reihenfolgen derselben enthalten werden, welche gradlinige Flächen bilden, und dafs die Brennflächen in der Regel sich in bestimmten Curven schneiden, da alle Tangenten an die Durchschnittscurve der beiden Brennflächen solche Strahlen sind, deren Brennpunkte zusammenfallen. Es giebt aber auch eine ganze Gattung von Strahlensystemen, in denen sämmtliche Strahlen diese Eigenschaft haben, weil ihre beiden Brennflächen sich decken, indem sie in eine einzige Fläche vereinigt sind.

§. 9.

Vergleichung der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme mit der speciellen Theorie der Krümmung der Flächen und der Systeme ihrer Normalen.

Die Strahlensysteme, deren allgemeine Theorie in dem Vorhergehenden entwickelt worden ist, gehen in dem besonderen Falle, wo die beiden mit f und f′ bezeichneten, aus den partiellen Differentialquotienten von x, y, z und ξ, η, ζ zusammengesetzten Ausdrücke einander gleich sind, in solche specielle Systeme über, deren Strahlen sämmtlich Normalen einer und derselben Fläche sind. Wenn es nämlich eine Fläche giebt, für welche jeder Strahl eine Normale ist, und man bezeichnet mit x', y', z' die Coordinaten des Punktes derselben, in welchem der durch x, y, z, ξ, η, ζ bestimmte Strahl des Systems auf ihr normal steht, und nennt die Entfernung dieses Punktes vom Ausgangspunkte x, y, z des Strahls r, so hat man

$$(1.) \qquad x' = x + r\xi, \quad y' = y + r\eta, \quad z' = z + r\zeta,$$

und weil dieser Strahl auf der Fläche senkrecht stehen soll, so mufs

$$(2.) \qquad \xi\,dx' + \eta\,dy' + \zeta\,dz' = 0$$

sein. Diese Bedingung giebt, wenn für x', y', z' ihre Werthe eingesetzt werden:

$$(3.) \qquad \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz + dr(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + r(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta) = 0,$$

und folglich

$$(3.) \qquad \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = -\,dr$$

oder

$$(4.) \qquad (\xi a + \eta b + \zeta c)\,du + (\xi a' + \eta b' + \zeta c')\,dv = -\,dr.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung mufs also ein vollständiges Differential einer Function $-r$ der beiden unabhängigen Variabeln u und v sein. Es mufs daher

$$(5.) \qquad \frac{\partial(\xi a+\eta b+\zeta c)}{\partial v} = \frac{\partial(\xi a'+\eta b'+\zeta c')}{\partial u}$$

sein, und hieraus erhält man durch Ausführung der partiellen Differentiationen, weil

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}, \quad \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial b'}{\partial u}, \quad \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial c'}{\partial u}$$

ist, folgende Bedingung:

$$aa' + bb' + cc' = a'a + b'b + c'c,$$

also

$$(6.) \qquad f = f',$$

welche identisch erfüllt sein mufs, damit das Strahlensystem ein System von Normalen einer Fläche sei. Dafs diese Bedingung auch die hinreichende ist, geht daraus hervor, dafs, wenn sie erfüllt ist, die Gröfse r aus der Gleichung (4.) als Function von u und v bestimmt werden kann, und dafs für einen solchen Werth des r die Gleichungen (1.) eine Fläche darstellen, deren Normalen die Strahlen des Systems sind. Da zu dem aus der Differentialgleichung (4.) bestimmten Werthe des r eine beliebige Constante addirt werden kann, so hat man alsdann nicht nur eine, dieser Bedingung genügende Fläche, sondern eine ganze Schaar derselben, welche unter dem Namen Parallelflächen bekannt sind.

Für $f = f'$ wird die quadratische Gleichung (5.) §. 4, deren Wurzeln τ_1 und τ_2 sind, mit der quadratischen Gleichung (4.) §. 2, deren Wurzeln t_1 und t_2 sind, und ebenso die quadratische Gleichung (9.) §. 4, deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 sind, mit der quadratischen Gleichung (16.) §. 2, deren Wurzeln r_1 und r_2 sind, identisch. Hieraus folgt:

In denjenigen Systemen, deren Strahlen Normalen einer Fläche sind, fallen die beiden Fokalebenen eines jeden Strahls mit den beiden Hauptebenen und die beiden Brennpunkte mit den beiden Gränzpunkten der kürzesten Abstände zusammen.

Wählt man in diesem Falle eine der Flächen, für welche alle Strahlen des Systems Normalen sind, als diejenige Fläche, von welcher alle Strahlen als ausgehend betrachtet werden, so sind die Abscissen der Brennpunkte ϱ_1 und ϱ_2 oder, was hier dasselbe ist, die Abscissen der Gränzpunkte r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser dieser Fläche, und die Brennflächen des Systems, welche mit den Gränzflächen der kürzesten Abstände zusammenfallen, sind die von ***Monge*** behandelten Flächen, in denen die Mittelpunkte

aller Hauptkrümmungskreise liegen. Die Theorie der Krümmung der Flächen kann somit als ein specieller Fall der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme aufgefafst werden, und es ist nicht ohne Interesse, den Zusammenhang der in dem Vorstehenden entwickelten allgemeinen Sätze mit den bekannten Sätzen aus der Theorie der Krümmung der Flächen etwas näher zu erörtern.

Untersucht man zunächst, ob die allgemeinere Theorie der Strahlensysteme vielleicht neue Sätze für die Theorie der Krümmung und der Normalen der Flächen ergiebt, so findet man, wie zu erwarten, keine grofse Ausbeute. In dieser Beziehung kann der durch die Gleichung

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega$$

(16.) §. 3 ausgedrückte Satz als ein solcher angeführt werden, welcher, da er ebenso eine allgemeine Eigenschaft der Normalen einer Fläche ausspricht, in diese speciellere Theorie aufgenommen zu werden verdiente. Ferner kann aus der im §. 8 nachgewiesenen Eigenschaft der unendlich dünnen Strahlenbündel, dafs die Querschnitte derselben in den beiden Brennpunkten nicht unendlich kleine Flächen sondern unendlich kleine Linien sind, welche in den beiden Fokalebenen liegen, folgender nicht uninteressante, und wie ich glaube, noch nicht bekannte Satz für die Normalen der Flächen gewonnen werden:

Die beiden Hauptnormalebenen eines Punktes einer Fläche werden von allen diesem Punkte unendlich nahen Normalen so geschnitten, dafs die Entfernungen der Durchschnittspunkte von dem gegebenen Punkte der Fläche in der einen Hauptnormalebene gleich dem gröfsten, in der anderen gleich dem kleinsten Krümmungshalbmesser sind.

Geht man die bekannten Sätze über die Krümmung und die Normalen der Flächen durch, so findet man dieselben in allgemeinerer Form und Bedeutung in der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme wieder.

Betrachtet man zunächst die beiden Hauptnormalschnitte für einen Punkt einer Fläche, welche den gröfsten und den kleinsten Krümmungshalbmesser ergeben, so hat man in der allgemeinen Theorie einerseits die beiden Hauptebenen und andererseits die beiden Fokalebenen als diesen entsprechende Ebenen. Die mit den Hauptnormalebenen zusammenhängenden Eigenschaften der Normalen der Flächen vertheilen sich in der allgemeineren Theorie so, dafs ein Theil derselben den Hauptebenen, ein anderer Theil den Fokalebenen zufällt. Die Hauptebenen erhalten die Eigenschaften, stets real zu sein und auf einander senkrecht zu stehen, die Fokalebenen aber erhalten die Eigen-

schaft, dafs in ihnen die beiden den gegebenen Strahl schneidenden, unendlich nahen Strahlen liegen. Ebenso spalten sich die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Flächen in der allgemeineren Theorie in die Gränzpunkte der kürzesten Abstände und in die Brennpunkte, und demgemäfs auch die Flächen, in denen die Hauptkrümmungsmittelpunkte liegen, in die Gränzflächen der kürzesten Abstände und die Brennflächen. Den Gränzflächen bleibt hier nur die schon in ihrer Benennung ausgedrückte Eigenschaft, dafs sie den Raum begränzen, innerhalb dessen alle kürzesten Abstände je zweier unendlich nahen Strahlen liegen, die Brennflächen aber erhalten die Eigenschaft, dafs sie von allen Strahlen des Systems tangirt werden. Die beiden schönen von ***Monge*** gefundenen Eigenschaften der Flächen der Hauptkrümmungsmittelpunkte, nämlich erstens, dafs die Umrisse derselben sich stets rechtwinklig schneiden, von welchem Punkte des Raumes man sie auch betrachten mag, und zweitens, dafs die Wendungskurven aller abwickelbaren Flächen, in welche die Normalen sich zusammenfassen lassen, kürzeste Linien auf den Flächen der Hauptkrümmungsmittelpunkte sind, gehen, als den Systemen der Normalen einer Fläche speciell angehörende Eigenschaften, sowohl für die Gränzflächen der kürzesten Abstände als auch für die Brennflächen der allgemeinen Strahlensysteme verloren.

Die beiden Schaaren der Krümmungslinien der Flächen, in so fern sie die Eigenschaft haben, dafs die ihnen zugehörenden Normalen abwickelbare Flächen bilden, treten in den allgemeinen Strahlensystemen als die zwei im §. 5 mit Ω_1 und Ω_2 bezeichneten Schaaren abwickelbarer Flächen auf. Andererseits können aber auch die gradlinigen Flächen O_1 und O_2 als den Krümmungslinien der Flächen entsprechend betrachtet werden, weil auch diese in dem speciellen Falle, wo alle Strahlen Normalen einer Fläche sind, indem sie mit jenen zusammenfallen, die Krümmungslinien aus der Fläche ausschneiden.

Die Nabelpunkte der Flächen, für welche die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte sich vereinigen, so dafs alle unendlich nahen Normalen durch den Vereinigungspunkt derselben hindurchgehen, und in welchen die Hauptnormalebenen ihre bestimmten Richtungen verlieren, finden sich in den allgemeinen Strahlensystemen als die Hauptstrahlen, deren unendlich nahe Strahlen alle durch einen Punkt gehen, und deren Hauptebenen sowohl, als Fokalebenen unbestimmt sind.

Der ***Euler***sche Satz, welcher lehrt, wie der Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnitts durch die beiden Hauptkrümmungshalbmesser

und durch den Winkel bestimmt ist, den seine Ebene mit einer der Hauptebenen macht, ist als specieller Satz in der allgemeinen Gleichung (18.) §. 7 enthalten, welche für $\beta = \frac{\pi}{2}$, $r_1 = \varrho_1$, $r_2 = \varrho_2$ in die *Euler*sche Gleichung übergeht. Die allgemeine Methode im §. 7 läfst auch überhaupt die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte einer Fläche von einer neuen nicht uninteressanten Seite erkennen, indem sie zeigt, dafs der Drehungswinkel des Krümmungshalbmessers eines Normalschnitts mit einer, von dem unendlich nahen Punkte in der Ebene dieses Schnittes ausgehenden Normale, für die ganze Länge des Krümmungshalbmessers gerechnet, gleich einem Rechten ist, oder:

Wenn man an zwei unendlich nahe Punkte einer Fläche die Normalen zieht und ihnen die bestimmte Länge giebt, in welcher ihr Drehungswinkel gleich einem Rechten ist: so stellen sie die Krümmungshalbmesser der Fläche in diesen beiden unendlich nahen Punkten für den durch dieselben hindurchgehenden Normalschnitt dar.

Das *Gaufs*ische Krümmungsmaafs der Flächen findet sich in den allgemeinen Strahlensystemen als der allgemeinere Begriff des Dichtigkeitsmaafses wieder, und dem Ausdrucke desselben, als reciproker Werth des Products der beiden Hauptkrümmungshalbmesser, entspricht vollständig der im §. 6 gegebene Ausdruck des Dichtigkeitsmaafses, nach welchem dasselbe gleich ist dem reciproken Werthe des Products der Entfernungen der beiden Brennpunkte von dem betreffenden Punkte des Strahls. Für die Strahlensysteme, welche Normalen einer Fläche und darum auch Normalen der ganzen Schaar ihrer Parallelflächen sind, ist das Dichtigkeitsmaafs mit dem Krümmungsmaafse vollständig identisch, da in jedem Punkte des Raumes das Dichtigkeitsmaafs der Strahlen dem Krümmungsmaafse der durch diesen Punkt hindurchgehenden Parallelfläche gleich ist. Es zeigt sich auch hierin, wie die von *Gaufs* in die Wissenschaft eingeführten Begriffe durchgängig denjenigen Charakter wahrer Allgemeinheit an sich tragen, durch welchen sie ihren Einflufs weit über die Gebiete hinaus erstrecken, in denen sie ursprünglich entstanden sind.

Berlin, im October 1859.

Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen.

(Von Herrn *E. Heine* zu Halle.)

Die vorliegende Abhandlung liefert die Entwickelung der Formeln, welche ich im 53sten Bande dieses Journals S. 284 mittheilte, so wie die dort erwähnte Uebertragung auf die verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen und endlich Beispiele von der Anwendung der gefundenen Ausdrücke auf einige specielle Fälle.

Es ist bekannt, dafs ***Gaufs*** in seinen ***Disquisitiones generales circa ser. infin.*** etc. jene allgemeinen Kettenbrüche entwickelt hat, von denen er art. 13 sagen konnte, dafs kaum ein Kettenbruch von den Analysten entwickelt worden sei, der nach einem übersichtlichen Gesetze fortschreite und nicht als specieller Fall in den seinigen enthalten sei. Es sind diese Brüche die Entwickelungen von ***Quotienten*** hypergeometrischer Reihen

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)},$$

und im speciellen Falle, für $\beta = 0$, von ***einer*** hypergeometrischen Reihe $F(1, \alpha, \gamma)$ selbst.

In einer späteren Arbeit: ***Methodus nova integralium val. per approx. inven.*** betrachtet ***Gaufs*** einen unter dem letzteren enthaltenen besonderen Fall, den der logarithmischen Reihe, und findet das Gesetz für die ***Nenner*** der Näherungswerthe von $\log\frac{1+x}{1-x}$, bei welcher Gelegenheit sich das wichtige Resultat ergab, dafs diese Nenner mit den Kugelfunctionen übereinstimmen, und dafs jeder ***Zähler*** sich von dem Producte des Nenners in $\log\frac{1+x}{1-x}$ um einen ***Rest*** unterscheidet, dessen wesentlicher Theil wiederum eine hypergeometrische Reihe ist. (M. vergl. dort §. 18. Ein übersichtliches Gesetz für die Zähler in diesem Falle hat zuerst Herr ***Christoffel*** in seiner

Inaugural-Dissertation, Berlin 1856, später im 55sten Bande dieses Journals S. 68 gegeben. Dafs der Rest ein zweites Integral der bekannten linearen Differentialgleichung ist, von der eines durch den Nenner gegeben wird, findet sich im 26sten Bande dieses Journals, Formel (11.) bewiesen.) Nachdem ich, in Folge einer Aufforderung von ***Jacobi,*** die linearen Gleichungen, auf die man in diesem speciellen Falle durch ***Gaufs'*** Betrachtungen geführt wird, auch auf den allgemeineren übertragen hatte, dafs statt der logarithmischen Reihe $F(1, \alpha, \gamma)$ in einen Kettenbruch entwickelt wird, fand ich ihre Lösung, wodurch sowohl die Nenner des allgemeineren Kettenbruchs gefunden wurden, als auch das ähnliche Resultat für den Rest erwiesen war. Die Anwendung ***derselben*** Methode auf den allgemeinsten Fall, nämlich auf jene ***Quotienten,*** bot unübersteigliche Hindernisse dar.

Unterdessen hatte ***Eisenstein*** an verschiedenen Stellen dieses Journals neue Kettenbrüche ohne Beweis veröffentlicht, welche sich auf Reihen bezogen, die bei den elliptischen Functionen auftreten, und die zwar mit den von ***Gaufs*** gegebenen eine gewisse Aehnlichkeit haben, aber allgemeiner als diese sind. Von der Erwägung geleitet, dafs man den Kettenbruch kennt, wenn die Zähler und Nenner seiner Näherungswerthe, und in dem besondern Falle, dafs die Partialnenner sämmtlich 1 sind, wenn die Nenner der Näherungswerthe allein bekannt sind; dafs ferner meine Methode nicht die Kenntnifs des Kettenbruchs selbst, sondern nur seiner allgemeinen Form zum Auffinden der Näherungswerthe erfordert, gelang es mir (Bd. 32, S. 209 dieses Journals) durch Lösung linearer Gleichungen zuerst einige, später alle Entwickelungen von ***Eisenstein*** aufzufinden, und nachdem so die Verwandtschaft der ***Eisenstein***schen mit den ***Gaufs***schen Brüchen klarer hervorgetreten war, den Kern der Verallgemeinerung von ***Eisenstein*** zu entdecken (Bd. 32, S. 210 — 212). Die Uebertragung sämmtlicher Entwickelungen von ***Gaufs*** und einiger von ***Kummer,*** die sich auf die ***Gaufs***sche Reihe bezogen, auf die nach diesem Principe verallgemeinerte, die ich mit dem Zeichen φ einführte, wurde im 34sten Bande dieses Journals mitgetheilt, und der II. Abschnitt jener gröfseren Abhandlung enthält Alles, was ich bis dahin über diese Kettenbrüche gefunden hatte. Nachdem dort gezeigt worden ist, wie auch die Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruchs für $\varphi(1, \alpha, \gamma)$ durch Auflösung linearer Gleichungen sich ergeben, setzte ich zum Schlusse des II. Abschnittes eine andere Methode zu demselben Zwecke aus einander, die sich jetzt endlich als geeignet erwies, auch für die Kettenbrüche ***der Quotienten,***

sowohl der *Gauſs*schen als auch von

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)},$$

die Zähler, die Nenner und den Satz über den Rest zu liefern, so daſs meine Untersuchungen über diesen Gegenstand durch die vorliegende Arbeit ihren Abschluſs gefunden haben.

Es muſs noch bemerkt werden, daſs, ehe ich die allgemeinsten Untersuchungen vollendete, mir ein Resultat des Herrn *Christoffel* bekannt war, der bereits die Nenner der Entwickelung eines Quotienten von zwei besonderen *Gauſs*schen Reihen, wenn ich nicht irre von $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, durch Induction gefunden hatte.

Um eine Uebersicht über die folgende Abhandlung zu geben, bemerke ich, daſs §. 1 Gleichungen zwischen den Zählern P und Nennern Q enthält, welche bei allen Kettenbrüchen irgend eines Quotienten $\frac{f_0}{f_1}$ bestehen, wenn zwischen f_0, f_1 und anderen Gröſsen f_2, f_3, etc. solche lineare Relationen existiren, wie sie am Anfange des §. 1 angegeben sind. Diese Beziehungen sind nicht neu und rühren zum Theil in derselben Form von *Euler* her; man findet sie auch im Wesentlichen in den dioptrischen Untersuchungen von *Gauſs*. Ich habe sie aber zur leichteren Uebersicht kurz abgeleitet, indem ich nur die allgemein bekannten Sätze über Kettenbrüche ohne weiteren Beweis brauchte. Da, wenn $\frac{f_1}{f_0}$ ein Quotient zweier hypergeometrischer Reihen ist, solche lineare Relationen bestehen, und f_n wieder eine hypergeometrische Reihe wird, deren drei erste Elemente sich übrigens nur um ganze Zahlen von denen von f unterscheiden (wie man sofort aus dem I. Abschnitt von *Gauſs*' Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe und meiner Arbeit im 34sten Bande dieses Journals ersieht), so gelten die Formeln (2.), (3.), (4.) also auch für diese Functionen.

Ich verweile zunächst bei der Gleichung (4.). Setzt man hier $\beta = 0$, und $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich sofort das vorerwähnte Resultat von *Gauſs* für den Rest bei der Entwickelung der logarithmischen Reihe und, wenn α und γ allgemein bleiben, das allgemeinere, welches ich für diesen Fall oben angab; es bleibt, wie man sieht, selbst noch bestehen, wenn auch β allgemein ist (das genaue Resultat für diesen Fall findet man fertig angegeben §. 3, Formel 14), so daſs, wenn es nicht darauf ankommt, die Zähler und Nenner

P_n und Q_n selbst zu kennen, zur Kenntnifs des Satzes über den Rest ein weiteres Eingehen in die Eigenschaften der hypergeometrischen Reihe nicht erfordert wird. Einige specielle Fälle dieses Satzes sind bereits bekannt und von Herrn ***Bauer*** im 56sten Bande dieses Journals §. 9 angegeben. Er findet dieselben, indem er einige Functionen auf doppelte Art nach Kugelfunctionen entwickelt, und die gleichnamigen Coefficienten dieser Entwickelungen gleich setzt. Die Zähler und Nenner selbst, die bei ihm auftreten, hat er nicht angegeben.

Die Gleichungen (2.), (3.), (4.) enthalten nur drei nicht identische Gleichungen zwischen vier Zählern und Nennern P_{n-1}, Q_{n-1}, P_n und Q_n. Eine vierte findet sich durch folgende Betrachtung: Man weifs, dafs wenn $\frac{P_n}{Q_n}$ ein Kettenbruch $\cfrac{1}{\mu_1+\cfrac{\nu_1}{\mu_2+\cdots+\cfrac{\nu_{n-1}}{\mu_n}}}$ ist, der umgekehrte Kettenbruch $\cfrac{1}{\mu_n+\cfrac{\nu_{n-1}}{\mu_{n-1}+\cdots+\cfrac{\nu_1}{\mu_1}}}$ immer $\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$ wird. Führt nun eine Reihe von Functionen f_0, f_1, f_2, etc. durch solche lineare Gleichungen, wie wir sie oben erwähnten, auf den ersten Kettenbruch als Anfang der Entwickelung von $\frac{f_0}{f_1}$, und kennt man noch eine zweite Reihe von Functionen, ψ_0, ψ_1, etc., die auf den zweiten als Anfang der Entwickelung von $\frac{\psi_0}{\psi_1}$ führen, so wird man aus jeder der drei Gleichungen, und hier genügt die eine (4.), eine neue bilden, in der die ψ statt der f, und statt P_n, Q_n die Zähler und Nenner des neuen $n$ten Näherungswerthes, also Q_{n-1} und Q_n, stehen. Eine solche Reihe von Functionen ψ kennt man aber durch Gleichung (72.) der Arbeit im 34sten Bande, indem ich dort darauf aufmerksam machte, dafs durch Umkehrung des Anfanges der Entwickelung eines Quotienten wiederum der Anfang der Entwickelung eines ähnlichen Quotienten entsteht. Wir haben somit die gehörige Anzahl linearer Gleichungen, um die P und Q zu finden. Durch ihre Auflösung ergeben sich die Werthe im §. 2, die im §. 3 noch vereinfacht werden.

Nachdem im §. 4 einige Bemerkungen über die nachträgliche Verification dieser Formeln und über ihre Natur gemacht sind, behandeln die übrigen Paragraphen nur noch einige besondere Fälle.

Wo die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe betrachtet wurde, war ich genöthigt, die Untersuchungen meiner Arbeit Band 34 vorauszusetzen. Da die allgemeinen Ausdrücke noch ihre Gültigkeit behalten, wenn man $q = 1$ setzt, wodurch sie sich in Formeln verwandeln, die für die *Gaufs*sche Reihe gelten, so schien es überflüssig, die allgemeinen Entwickelungen zuerst für die *Gaufs*schen Quotienten und dann erst für die neuen Reihen zu geben; eine solche Trennung trat erst bei den Beispielen und bei einer Betrachtung des §. 3 ein. Da ich jedoch nicht eine gröfsere Verbreitung der Untersuchungen im 34sten Bande voraussetzen darf, so mag hier für die Leser, welche sich mit der Ausdehnung der Betrachtungen auf die Quotienten von *Gaufs* begnügen wollen, bemerkt werden, dafs sie, um richtige Formeln zu erhalten, nur q überall gleich 1 zu setzen haben und dann φ mit dem Zeichen der hypergeometrischen Reihe F vertauschen können.

§. 1.

Bestehen zwischen Gröfsen $f_0, f_1, f_2,$ etc. f_{n+1} lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} f_0 &= \mu_1 f_1 + \nu_1 f_2, \\ f_1 &= \mu_2 f_2 + \nu_2 f_3, \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ f_{n-1} &= \mu_n f_n + \nu_n f_{n+1}, \end{aligned}$$

so läfst sich f_0 offenbar linear durch zwei aufeinanderfolgende f, z. B. durch f_n und f_{n+1}, ausdrücken. So erhält man

$$f_0 = (\mu_1\mu_2 + \nu_1) f_2 + \mu_1\nu_2 f_3,$$

also, wenn man allgemein

$$f_0 = A_n f_n + \nu_n B_n f_{n+1}$$

setzt,

$$A_1 = \mu_1, \quad A_2 = \mu_1\mu_2 + \nu_1; \qquad B_1 = 1, \quad B_2 = \mu_1.$$

Man weifs seit *Euler*, dafs die A und B Nenner von Näherungswerthen des Kettenbruchs sind, in den $\frac{f_0}{f_1}$ vermittelst der vorstehenden linearen Beziehungen entwickelt wird. Um dies zu beweisen, benutzt man die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} f_0 &= A_{n-1} f_{n-1} + \nu_{n-1} B_{n-1} f_n, \\ f_{n-1} &= \mu_n f_n + \nu_n f_{n+1}, \end{aligned}$$

aus denen durch Elimination

$$f_0 = (\mu_n A_{n-1} + \nu_{n-1} B_{n-1}) f_n + A_{n-1} \nu_n f_{n+1}$$

erhalten wird, und vergleicht man diesen Ausdruck mit

$$f_0 = A_n f_n + \nu_n B_n f_{n+1},$$

so findet man sofort die zwei Relationen

$$B_n = A_{n-1},$$
$$A_n = \mu_n A_{n-1} + \nu_{n-1} B_{n-1}$$

oder statt der letzteren mit Hülfe der ersteren

$$A_n = \mu_n A_{n-1} + \nu_{n-1} A_{n-2}.$$

Berücksichtigt man die oben angegebenen besonderen Werthe von A für $n=1$ und $n=2$, so ist klar, dafs, wie behauptet wurde, die A und B die auf gewöhnliche Art gebildeten Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruchs

$$(1.) \quad \frac{f_1}{f_0} = \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{\nu_1}{\mu_2 + \cfrac{\nu_2}{\ddots + \cfrac{\nu_{n-1}}{\mu_n + \ddots}}}}$$

sind, und zwar wird $A_n = Q_n$, wenn wir unter Q_n den Nenner des n^{ten}, d. h. bis zu μ_n incl. gehenden Kettenbruchs verstehen. (Der Zähler dieses Bruches, welcher unten auftreten wird, soll durch P_n bezeichnet werden.) Es wird daher auch $B_n = Q_{n-1}$. In der That gelten für die Q dieselben Formeln, welche so eben für die A gefunden waren, nämlich

$$Q_1 = \mu_1, \quad Q_2 = \mu_1 \mu_2 + \nu_1, \quad Q_n = \mu_n Q_{n-1} + \nu_{n-1} Q_{n-2},$$

so dafs schliefslich

$$(2.) \quad f_0 = Q_n f_n + \nu_n Q_{n-1} f_{n+1}$$

erhalten wird.

Auf ähnliche Art läfst sich auch f_1 durch f_n und f_{n+1} ausdrücken; setzt man nämlich

$$f_1 = G_n f_n + \nu_n H_n f_{n+1},$$

so ist $G_2 = \mu_2$, $G_3 = \mu_2 \mu_3 + \nu_2$; $H_2 = 1$, und allgemein

$$H_n = G_{n-1},$$
$$G_n = \mu_n G_{n-1} + \nu_{n-1} H_{n-1} = \mu_n G_{n-1} + \nu_{n-1} G_{n-2}.$$

Hieraus folgt wieder

$$G_n = P_n, \quad H_n = P_{n-1},$$

also, entsprechend der Formel (2.),

$$(3.) \quad f_1 = P_n f_n + \nu_n P_{n-1} f_{n+1}.$$

Während (2.) und (3.) ein früheres f durch zwei spätere, f_n und f_{n+1}, ausdrücken, so läfst sich umgekehrt auch f_{n+1} linear durch f_0 und f_1 finden. Am leichtesten geschieht dies durch Anwendung der bekannten Formel

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^{n+1} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1},$$

die nach Elimination von f_n aus (2.) und (3.) die Gleichung

$$(4.) \quad f_1 Q_n - f_0 P_n = (-1)^n \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n f_{n+1}$$

verschafft.

Endlich wird hier noch an die schon in der Einleitung erwähnte Eigenschaft erinnert, nach der bekanntlich der auf gewöhnliche Art gebildete Zähler und Nenner des Kettenbruchs

$$(5.) \quad \cfrac{1}{\mu_n + \cfrac{\nu_{n-1}}{\mu_{n-1} + \dots + \cfrac{\nu_2}{\mu_2 + \cfrac{\nu_1}{\mu_1}}}}$$

respective Q_{n-1} und Q_n ist, und des Kettenbruchs von vorstehender Form, der aber nur bis $\frac{\nu_2}{\mu_2}$ fortgesetzt ist, respective P_{n-1} und P_n.

§. 2.

Die drei Gleichungen (2.), (3.) und (4.) reichen nicht zur Bestimmung der vier Gröfsen P_{n-1}, Q_{n-1}, P_n, Q_n aus, wenn man sich auch die f und die ν gegeben denkt. Die besonderen Eigenschaften der Kettenbrüche für Quotienten hypergeometrischer Reihen geben noch eine vierte Gleichung, die zu diesem Zwecke dienlich ist; der leichteren Elimination halber wird noch eine überflüssige Gleichung, die sich gelegentlich ergiebt, hinzugenommen.

Die allgemeinsten Brüche, mit denen wir uns hier beschäftigen, sind die im zweiten Abschnitt meiner Arbeit im Bd. 34 dieses Journals angegebenen. Es wurde dort

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)} x + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} x^2 + \dots$$

gesetzt, und aus den Formeln (45.) und (46.) ergab sich

$$(6.) \quad \frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \text{etc.}}}}.$$

Es sind die Gröfsen a_1, a_2, etc. so wie die später auftretende a_0 durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$a_0 = q^{\alpha-1}\frac{(1-q^{\beta})(1-q^{\gamma-\alpha})}{(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\gamma})}, \qquad a_1 = q^{\beta}\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{2m} = q^{\alpha+m-1}\frac{(1-q^{\beta+m})(1-q^{\gamma+m-\alpha})}{(1-q^{\gamma+2m-1})(1-q^{\gamma+2m})}, \qquad a_{2m+1} = q^{\beta+m}\frac{(1-q^{\alpha+m})(1-q^{\gamma+m-\beta})}{(1-q^{\gamma+2m})(1-q^{\gamma+2m+1})}.$$

Es wurde damals festgesetzt, dafs es erlaubt sein sollte, bei der Bezeichnung der Reihe *die* Elemente nicht ausdrücklich aufzuführen, welche ohne Zweideutigkeit fortgelassen werden können; bleibt z. B. bei einer Reihe von Functionen q und x ungeändert, so können diese Buchstaben fortbleiben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde q nicht gröfser als 1 angenommen, also im allgemeinen $q<1$; nur und immer wenn $q=1$, geht die Reihe in die *Gaufs*sche über.

Die Formeln des §. 1 lassen sich sofort anwenden, wenn man

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)=f_0, \qquad \varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)=f_1,$$

$$\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)=f_2, \qquad \varphi(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3)=f_3,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi(\alpha+m,\beta+m,\gamma+2m)=f_{2m}, \qquad \varphi(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1)=f_{2m+1}$$

setzt, wenn man ferner alle μ gleich 1 und $\nu_n = -a_n x$ macht. Man erhält dadurch aus (2.) und (3.) die Gleichungen

$$(2.^*) \qquad Q_n f_n - a_n x\, Q_{n-1} f_{n+1} = f_0,$$

$$(3.^*) \qquad P_n f_n - a_n x\, P_{n-1} f_{n+1} = f_1.$$

Die Relation, welche den vorliegenden Reihen eigenthümlich ist, und von der am Anfange dieses Paragraphen die Rede war, besteht darin, dafs, wie schon Bd. 34 am Schlusse des II. Abschnitts bemerkt wurde, der Quotient

$$\frac{\varphi(-m-\beta,\,1-m-\alpha,\,1-\gamma-2m,\,q,\,q^{\alpha+\beta-\gamma}x)}{\varphi(-m-\beta,\;-m-\alpha,\;-\gamma-2m,\,q,\,q^{\alpha+\beta-\gamma}x)},$$

wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet, den Kettenbruch

$$(7.) \qquad \cfrac{1}{1-\cfrac{a_{2m}x}{1-\cfrac{a_{2m-1}x}{1-\ddots\cfrac{}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_0 x}{1-\text{etc.}}}}}}}$$

giebt. Macht man zur Abkürzung

$$\psi_{2n} = \varphi(n-m-\alpha, n-m-\beta, 2n-2m-\gamma, q, q^{\alpha+\beta-\gamma}x),$$
$$\psi_{2n+1} = \varphi(n+1-m-\alpha, n-m-\beta, 2n+1-2m-\gamma, q, q^{\alpha+\beta-\gamma}x),$$

so lassen sich auch hier die Formeln des §. 1 anwenden, wenn man darin $f_n = \psi_n$, alle μ gleich 1 und $\nu_1 = -a_{2m}x$, $\nu_2 = -a_{2m-1}x$, etc. setzt. Beziehen sich Π und Σ ebenso auf (7.) wie P und Q auf (6.), so erhält man aus (2.), (3.), (4.) drei Gleichungen, die sich auf (7.) beziehen, und von denen die letzte ist:

$$(4.^*) \qquad \psi_1\Sigma_n - \psi_0\Pi_n = a_{2m}.a_{2m-1}\ldots a_{2m+1-n}x^n\psi_{n+1}.$$

Nach den Bemerkungen über die Umkehrung der Kettenbrüche am Ende des §. 1 hängen aber P, Q, Π und Σ so zusammen, dafs

$$\Pi_{2m+1} = Q_{2m}, \qquad \Pi_{2m} = P_{2m},$$
$$\Sigma_{2m+1} = Q_{2m+1}, \qquad \Sigma_{2m} = P_{2m+1}$$

wird. Durch Substitution dieser Werthe in (4.*) entstehen zwei Gleichungen

$$(8.) \qquad \psi_1 Q_{2m+1} - \psi_0 Q_{2m} = a_0 a_1 \ldots a_{2m} x^{2m+1} \psi_{2m+2},$$
$$(9.) \qquad \psi_1 P_{2m+1} - \psi_0 P_{2m} = a_1 a_2 \ldots a_{2m} x^{2m} \psi_{2m+1},$$

von denen die erste mit (2.*), wenn man darin $n = 2m+1$ setzt, d. h. mit

$$f_{2m+1}Q_{2m+1} - a_{2m+1}x\,Q_{2m}f_{2m+2} = f_0,$$

die zweite mit (3.*) für $n = 2m+1$, d. h. mit

$$f_{2m+1}P_{2m+1} - a_{2m+1}x\,P_{2m}f_{2m+2} = f_1$$

combinirt, die gesuchten Werthe für die P und Q liefert. Die Auflösung dieser Gleichungen giebt nämlich, wenn man

$$C = \psi_0 f_{2m+1} - a_{2m+1}x\,\psi_1 f_{2m+2}$$

zur Abkürzung macht:

$$CP_{2m} = f_1\psi_1 - a_1 a_2 \ldots a_{2m} x^{2m} f_{2m+1}\psi_{2m+1},$$
$$CQ_{2m} = f_0\psi_1 - a_0 a_1 \ldots a_{2m} x^{2m+1} f_{2m+1}\psi_{2m+2},$$
$$CP_{2m+1} = f_1\psi_0 - a_1 a_2 \ldots a_{2m+1} x^{2m+1} f_{2m+2}\psi_{2m+1},$$
$$CQ_{2m+1} = f_0\psi_0 - a_0 a_1 \ldots a_{2m+1} x^{2m+2} f_{2m+2}\psi_{2m+2}.$$

§. 3.

Diese Ausdrücke vereinfachen sich wesentlich, indem die Gröfse C gleich 1 ist. Aus den am Anfange des §. 1 aufgestellten Beziehungen folgt

nämlich für jedes ganze n

$$-a_n x f_{n+1} = f_{n-1} - f_n,$$
$$-a_{2m} x \psi_2 = \psi_0 - \psi_1,$$

also

$$C = \psi_1 f_{2m} - \psi_1 f_{2m+1} + \psi_0 f_{2m+1} = \psi_1 f_{2m} - a_{2m} x \psi_2 f_{2m+1}.$$

Auf ähnliche Art kann man noch einmal reduciren, indem man

$$-a_{2m} x f_{2m+1} = f_{2m-1} - f_{2m},$$
$$-a_{2m-1} x \psi_3 = \psi_1 - \psi_2$$

einsetzt, und findet dann

$$C = \psi_2 f_{2m-1} - \psi_2 f_{2m} + \psi_1 f_{2m} = \psi_2 f_{2m-1} - a_{2m-1} x \psi_3 f_{2m}.$$

Berücksichtigt man noch, dafs f_{2m+1}, f_{2m+2}, a_{2m+1}, ψ_0, ψ_1 durch Vertauschung von m mit $m-1$ respective in f_{2m-1}, f_{2m}, a_{2m-1}, ψ_2, ψ_3 übergehen, so ist klar, dafs C, d. h. wenn man den Werth vollständig hinsetzt, dafs

$$\varphi(-m-\alpha, -m-\beta, -2m-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha+m, \beta+m+1, \gamma+2m+1, x) -$$
$$q^{\beta+m}\frac{(1-q^{\alpha+m})(1-q^{\gamma+m-\beta})}{(1-q^{\gamma+2m})(1-q^{\gamma+2m+1})} x \varphi(1-m-\alpha, -m-\beta, 1-2m-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x) \times$$
$$\varphi(\alpha+m+1, \beta+m+1, \gamma+2m+2, x)$$

sich durch Vertauschung von m mit $m-1$ nicht ändert, also für alle ganzen Werthe von m dasselbe bleibt. Ist nun *erstens* $q<1$, so gehe man auf ein unendliches m über, für welches sich C auf das Product der beiden ersten Reihen φ reducirt. Diese werden dann aber

$$1 - \frac{x}{1-q} + \frac{qx^2}{(1-q)(1-q^2)} - \cdots$$

und

$$1 + \frac{x}{1-q} + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)} + \cdots$$

und sind bekanntlich (M. vergl. z. B. Bd. 34, Formel (76.) und (77.)) resp. gleich

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}, \qquad (1-x)(1-qx)(1-q^2x)\,\text{etc.},$$

also ihr Product gleich 1. Ist aber *zweitens* $q=1$, so denke man sich die Producte ausgeführt und alles nach x geordnet. Dann ist der Coefficient jeder Potenz von x eine rationale Function von m, die, wie wir sehen, für *alle ganze*, also für *alle* Werthe von m ungeändert bleibt. Macht man, was nun erlaubt ist, $m=-\alpha$, so wird offenbar wiederum 1 als Werth von C hervorgehen.

So erhält man die Formeln für die Zähler und Nenner in ihrer einfachsten Gestalt, wie sie bereits im 53sten Bande dieses Journals für $q = 1$ veröffentlicht wurden; was dort P_n oder Q_n genannt war, heifst hier P_{n+1} oder Q_{n+1}. Der Kürze wegen habe ich die Werthe der a aus dem Anfange des §. 2 nicht eingesetzt, ferner das vierte Element q überall und das fünfte da, wo es einfach x ist, fortgelassen. Die Formeln sind daher:

$$(10.)\quad P_{2m} = \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)\,\varphi(1-m-\alpha, -m-\beta, 1-2m-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x) - a_1 a_2 \ldots a_{2m} x^{2m}\,\varphi(\alpha+m, \beta+m+1, \gamma+2m+1)\,\varphi(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x),$$

$$(11.)\quad Q_{2m} = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\,\varphi(1-m-\alpha, -m-\beta, 1-2m-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x) - a_0 a_1 \ldots a_{2m} x^{2m+1}\,\varphi(\alpha+m, \beta+m+1, \gamma+2m+1)\,\varphi(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x),$$

$$(12.)\quad P_{2m+1} = \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)\,\varphi(-m-\alpha, -m-\beta, -2m-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x) - a_1 a_2 \ldots a_{2m+1} x^{2m+1}\varphi(\alpha+m+1, \beta+m+1, \gamma+2m+2)\,\varphi(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x),$$

$$(13.)\quad Q_{2m+1} = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\,\varphi(-m-\alpha, -m-\beta, -2m-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x) - a_0 a_1 \ldots a_{2m+1} x^{2m+2}\varphi(\alpha+m+1, \beta+m+1, \gamma+2m+2)\,\varphi(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, q^{\alpha+\beta-\gamma}x).$$

Wir fügen noch die sich auf den Rest beziehende Formel (4.), angewendet auf die vorliegenden Reihen, hinzu:

$$(14.)\quad \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)\,Q_n - \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\,P_n = a_1 a_2 \ldots a_n x^n f_{n+1},$$

wo, je nachdem $n = 2m$ oder $n = 2m+1$ gemacht ist,

$$f_{n+1} = \varphi(\alpha+m, \beta+m+1, \gamma+2m+1)$$

oder

$$f_{n+1} = \varphi(\alpha+m+1, \beta+m+1, \gamma+2m+2)$$

gesetzt wird.

§. 4.

Kommt es nun darauf an, die vorstehenden Formeln zu *verificiren*, so kann dies leicht durch die Gleichungen im I. Abschnitt der Arbeit im 34sten Bande geschehen, welche denen von *Gaufs* in den *Relationes inter functiones contiguas* nachgebildet sind. Durch diese zeigt man nämlich leicht, dafs jene vier Ausdrücke, für P und Q gesetzt, den Gleichungen

$$P_n = P_{n-1} - a_{n-1} x P_{n-2},$$
$$Q_n = Q_{n-1} - a_{n-1} x Q_{n-2}$$

genügen. Ferner sieht man aus denselben ein, dafs

$$P_1 = Q_1 = P_2 = 1; \qquad Q_2 = 1 - a_1 x$$

wird. Z. B. ist P_1 nach Formel (12.) der Ausdruck, welchen man aus C für $m=0$ erhält, also, wie wir aus §. 3 wissen, gleich 1. Die zu der Untersuchung des Werthes von C angewandten Gleichungen zwischen den f und zwischen den ψ sind keine anderen, als die im Bd. 34 Gleichung (45.) und (46.) enthaltenen.

Betrachtet man die Art, wie aus dem Kettenbruch die Zähler und Nenner successive gebildet werden, so erkennt man ***den Grad*** nach x, den sie haben, und sieht, dafs P_{2m} eine ganze Function vom $m-1^{\text{ten}}$, Q_{2m}, P_{2m+1}, Q_{2m+1} vom m^{ten} Grade ist. Dasselbe folgt demnach auch für die rechten Seiten von (10.) bis (13.).

Hieraus ist klar, dafs man, ***um die P und Q nach Potenzen von x zu ordnen,*** nur das Product der ersten beiden Functionen in jeder der vier Zeilen zu bilden, und die Glieder, welche die niedrigsten Potenzen von x enthalten, bei P_{2m} bis x^{m-1} inclusive, bei Q_{2m}, P_{2m+1}, Q_{2m+1} bis x^m inclusive beizubehalten braucht, welche unmittelbar die gesuchten Zähler oder Nenner geben. Man sieht, dafs die nächst höheren Potenzen respective bis x^{2m-1}, x^{2m}, x^{2m}, x^{2m+1} inclusive von selbst fortfallen, und die höheren erst sich gegen die subtractiven Glieder fortheben. Bei dieser Art der Berechnung ***kann man also die subtractiven Glieder unberücksichtigt*** lassen.

Jedes der beizubehaltenden Glieder ist dann offenbar das Product einer Potenz von x in eine endliche Reihe. Im Allgemeinen läfst sich diese nicht weiter reduciren; ***bei den Beispielen*** aber, die ich unten gebe, ***lassen sich diese Reihen, welche als Coefficienten auftreten, sämmtlich summiren.*** Beispiele, in denen nur einige dieser Coefficienten einfache Ausdrücke werden, habe ich nicht hinzugefügt, obgleich sie, wie eine Untersuchung von ***Borchardt*** im Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1857, S. 301 gezeigt hat, nicht ohne Interesse sind.

§. 5.

Die Fälle, in welchen unten die Summation ausgeführt wird, sind so beschaffen, dafs jene endlichen Reihen als hypergeometrische mit dem letzten Elemente $x=q^{\gamma-\alpha-\beta}$ auftreten (für $q=1$ also mit dem letzten Elemente 1); es kann dann bekanntlich die Summe der Reihe durch Producte Ω (respective Π) dargestellt werden (Bd. 34, IV. Abschnitt). Da die Reihen endlich sind, so mufs eines ihrer ersten beiden Elemente eine negative ganze Zahl $-\nu$ werden, also der Coefficient in der Form $\varphi(-\nu, \beta, \gamma, q^{\gamma+\nu-\beta})$ auftreten. Um

nicht bei Anwendung der Summationsformeln durch solche Ω (respective Π) hindurch gehen zu müssen, deren Argument eine negative ganze Zahl ist, kann man für diesen Fall durch Gleichung (25.) Bd. 34 (8. bei *Gaufs*) eine geeignetere entwickeln. Man erhält nämlich zunächst

$$(1-q^{\gamma})\varphi(-\nu-1, \beta, \gamma, q^{\gamma+1+\nu-\beta}) = (1-q^{\gamma-\beta})\varphi(-\nu, \beta, \gamma+1, q^{\gamma+1+\nu-\beta})$$

oder

$$\varphi(-\nu, \beta, \gamma, q^{\gamma+\nu-\beta}) = \frac{1-q^{\gamma-\beta}}{1-q^{\gamma}}\varphi(1-\nu, \beta, \gamma+1, q^{\gamma+\nu-\beta});$$

dann aber, durch ν malige Anwendung dieser Gleichung, indem eine hypergeometrische Reihe 1 wird, wenn ihr erstes Element 0 ist:

$$(15.) \quad \varphi(-\nu, \beta, \gamma, q^{\gamma+\nu-\beta}) = \frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})\ldots(1-q^{\gamma+\nu-1})},$$

und für den besonderen Fall $q=1$

$$(16.) \quad F(-\nu, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\gamma-\beta)(\gamma+1-\beta)\ldots(\gamma+\nu-1-\beta)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}.$$

§. 6.

Als erstes Beispiel wählen wir den Kettenbruch für e^x selbst, indem wir unsere Formeln auf $F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right)$ für $k=\infty$, d. h. auf die Reihe

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

anwenden. Den Kettenbruch schreiben wir nicht hin; er findet sich bei *Gaufs* Formel (34.). (Auch in den folgenden Paragraphen füge ich die Kettenbrüche, deren Entwickelung nach (6.) keine Schwierigkeit darbietet, nicht selbst an.) Wir haben hier in den allgemeinen Formeln $\alpha=k$, $\beta=\gamma=0$, und $\frac{x}{k}$ für x zu setzen. Die Schwierigkeit, welche dadurch entsteht, dafs

$$a_1 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}$$

die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wird gehoben, indem man zuerst $\beta=0$, also $a_1=\frac{\alpha}{\gamma+1}$ und dann $\gamma=0$ setzt; bei *Gaufs* bemerkt man sie nicht, da er die allgemeinen Formeln auf den Fall $\beta=0$ angewandt, also die Entwickelung von $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ selbst ausdrücklich gegeben hat. Man findet so für a_1x, a_2x, a_3x, etc. $a_{2m}x$, $a_{2m+1}x$, respective x, $-\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2.3}$, etc. $-\frac{x}{2(2m-1)}$, $\frac{x}{2(2m+1)}$;

ferner aus (11.) und (13.) unmittelbar

$$Q_{2m} = F\left(-k, -m, 1-2m, \frac{x}{k}\right),$$

$$Q_{2m+1} = F\left(-k, -m, -2m, \frac{x}{k}\right).$$

Um P_{2m} zu erhalten, hat man nach (10.) das Product der zwei Reihen

$$F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots,$$

$$F\left(-k, -m, 1-2m, \frac{x}{k}\right) = 1 + \frac{m}{1-2m}\cdot\frac{x}{1} + \frac{m(m-1)}{(1-2m)(2-2m)}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \cdots$$

zu bilden und nach Anleitung von §. 4 und 5 zu behandeln. Es tritt dann als Coefficient von x^ν in dem Producte, so lange $\nu < m$ ist, die endliche Reihe

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}{\Pi\nu(1-2m)(2-2m)\ldots(\nu-2m)}\left\{1 + \frac{\nu(\nu-2m)}{1(m-\nu+1)} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2m)(\nu-2m-1)}{1.2.(m-\nu+1)(m-\nu+2)} + \cdots\right\}$$

auf. Der Ausdruck in der Parenthese ist aber

$$F(-\nu, 2m-\nu, m-\nu+1, 1),$$

also nach (16.)

$$(-1)^\nu \cdot \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-\nu)}{(m-\nu+1)(m-\nu+2)\ldots m},$$

so dafs

$$P_{2m} = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-\nu)}{(2m-1)(2m-2)\ldots(2m-\nu)}\cdot\frac{x^\nu}{\Pi\nu}$$

wird. Auf ähnliche Art findet man auch P_{2m+1} aus (12.), und hat so die für den Kettenbruch von e^x geltenden Resultate:

$$P_{2m} = 1 + \frac{m-1}{2m-1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-2)}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \cdots,$$

$$Q_{2m} = 1 - \frac{m}{2m-1}\cdot\frac{x}{1} + \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-2)}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \cdots,$$

$$P_{2m+1} = 1 + \frac{m}{2m}\cdot\frac{x}{1} + \frac{m(m-1)}{2m(2m-1)}\cdot\frac{x^2}{1.2} + \cdots,$$

$$Q_{2m+1} = 1 - \frac{m}{2m}\cdot\frac{x}{1} + \frac{m(m-1)}{2m(2m-1)}\cdot\frac{x^2}{1.2} - \cdots.$$

Man sieht hieraus, dafs P_n mit wachsendem n sich $e^{\frac{1}{2}x}$, Q_n sich $e^{-\frac{1}{2}x}$ nähert, und auf diese Art e^x mit $\frac{P_n}{Q_n}$ für $n = \infty$ übereinstimmt. Für den Rest erhält man endlich aus (14.)

$$\boldsymbol{Q}_{2m}e^x - \boldsymbol{P}_{2m}$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \cdot \frac{x^{2m}}{1^2.3^2\ldots(2m-1)^2}\left\{1+\frac{m+1}{2m+1}\cdot\frac{x}{1}+\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+2)}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\cdots\right\},$$

$$\boldsymbol{Q}_{2m+1}e^x - \boldsymbol{P}_{2m+1}$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \cdot \frac{x^{2m+1}}{1^2.3^2..(2m-1)^2(2m+1)}\left\{1+\frac{m+1}{2m+2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{(m+1)(m+2)}{(2m+2)(2m+3)}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\cdots\right\}.$$

§. 7.

Die folgenden Beispiele können mit geringerer Ausführlichkeit behandelt werden, da die Methode der Berechnung dieselbe bleibt. Wir wenden unsere Untersuchungen hier auf den Quotienten

$$\frac{F\left(k,k,\gamma+1,\frac{x}{k^2}\right)}{F\left(k,k,\gamma,\frac{x}{k^2}\right)}$$

für $k=\infty$ an, der für $\gamma=\frac{1}{2}$ und $x=\frac{1}{4}y^2$ in

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$$

übergehen würde. Es werden dann die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche folgende Werthe erhalten:

$$\boldsymbol{P}_{2m}=1+\frac{(2m-1)(2m-2)}{(2m-1)(2m+\gamma-1)}\cdot\frac{x}{1.(\gamma+1)}+\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)}{(2m-1)(2m-2)(2m+\gamma-1)(2m+\gamma-2)}$$
$$\times\frac{x^2}{1.2.(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots,$$

$$\boldsymbol{Q}_{2m}=1+\frac{2m(2m-1)}{2m(2m+\gamma-1)}\cdot\frac{x}{1.\gamma}+\frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{2m(2m-1)(2m+\gamma-1)(2m+\gamma-2)}\cdot\frac{x^2}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\cdots,$$

$$\boldsymbol{P}_{2m+1}=1+\frac{2m(2m-1)}{2m(2m+\gamma)}\cdot\frac{x}{1.(\gamma+1)}+\cdots,$$

$$\boldsymbol{Q}_{2m+1}=1+\frac{(2m+1)2m}{(2m+1)(2m+\gamma)}\cdot\frac{x}{1.\gamma}+\cdots.$$

Das Gesetz, nach dem diese Reihen fortschreiten, ist leicht zu übersehen: bildet man nämlich eine Reihe, die ähnlich der hypergeometrischen ist, und nur statt der zwei Elemente α, β im Zähler vier α, β, δ, ε hat, im Nenner statt des einen γ drei, γ, η, ζ, so sind vorstehende Reihen unter dieser enthalten, z. B. erhält man $\boldsymbol{P}_{2m}$, wenn man die Elemente des Zählers gleich $-\frac{1}{2}(2m-1)$, $-\frac{1}{2}(2m-2)$, k, k, die des Nenners gleich $-(2m-1)$, $-(2m+\gamma-1)$, $\gamma+1$ macht und die Veränderliche gleich $\frac{4x}{k^2}$, darauf aber $k=\infty$ setzt.

§. 8.

Wir wenden nun unsere Formeln auf die den beiden früheren entsprechenden Entwickelungen an, welche durch q verallgemeinert sind; man hat dann nur statt der Formel (16.) die Gleichung (15.) bei der Summation zu gebrauchen. Dann ergeben sich folgende Zähler und Nenner des Kettenbruches, welcher aus (6.) für die Function $\varphi(k, 1, 1, x)$, nachdem k gleich ∞ gemacht ist, d. h. für

$$1+\frac{x}{1-q}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{x^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

folgt:

$$P_{2m}=1+\frac{1-q^{1-m}}{1-q^{1-2m}}\cdot\frac{x}{1-q}+\frac{(1-q^{1-m})(1-q^{2-m})}{(1-q^{1-2m})(1-q^{2-2m})}\cdot\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots,$$

$$Q_{2m}=1-\frac{1-q^{-m}}{1-q^{1-2m}}\cdot\frac{(xq^{1-m})}{1-q}+\frac{(1-q^{-m})(1-q^{1-m})}{(1-q^{1-2m})(1-q^{2-2m})}\cdot\frac{(xq^{1-m})^2q^1}{(1-q)(1-q^2)}-\cdots.$$

Die letztere Reihe ist

$$\varphi(-m, 1-m-k, 1-2m, xq^k)$$

für $k=\infty$, so dafs die Potenz von q, welche in dem ν^{ten} Gliede mit $(xq^{1-m})^\nu$ multiplicirt wird, $q^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$ ist. Ferner findet man

$$P_{2m+1}=1+\frac{1-q^{-m}}{1-q^{-2m}}\cdot\frac{x}{1-q}+\cdots,$$

$$Q_{2m+1}=1-\frac{1-q^{-m}}{1-q^{-2m}}\cdot\frac{(xq^{-m})}{1-q}+\cdots.$$

§. 9.

Als letztes Beispiel wähle ich den Quotienten

$$\frac{\varphi(k, k, \gamma+1, x)}{\varphi(k, k, \gamma, x)}$$

für $k=\infty$, also den Bruch, dessen Zähler und Nenner respective sind:

$$1+\frac{x}{(1-q)(1-q^{\gamma+1})}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})}+\cdots,$$

$$1+\frac{x}{(1-q)(1-q^{\gamma})}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}+\cdots.$$

Hier wird, wenn wir wegen der gröfseren Ausdehnung der Formeln nur die allgemeinen Glieder geben:

$$P_{2m} = \Omega(\gamma) \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{x^\nu}{\Omega(\nu)\Omega(\gamma+\nu)} \cdot \frac{(1-q^{\nu-2m+1})(1-q^{\nu-2m+2})\dots(1-q^{2\nu-2m})}{(1-q^{1-\gamma-2m})(1-q^{2-\gamma-2m})\dots(1-q^{\nu-\gamma-2m})},$$

$$Q_{2m} = \Omega(\gamma-1) \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\Omega(\nu)\Omega(\gamma+\nu-1)} \cdot \frac{(1-q^{\nu-2m})\dots(1-q^{2\nu-2m-1})}{(1-q^{1-\gamma-2m})\dots(1-q^{\nu-\gamma-2m})},$$

$$P_{2m+1} = \Omega(\gamma) \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\Omega(\nu)\Omega(\gamma+\nu)} \cdot \frac{(1-q^{\nu-2m})\dots(1-q^{2\nu-2m-1})}{(1-q^{-\gamma-2m})\dots(1-q^{\nu-1-\gamma-2m})},$$

$$Q_{2m+1} = \Omega(\gamma-1) \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{x^\nu}{\Omega(\nu)\Omega(\gamma+\nu-1)} \cdot \frac{(1-q^{\nu-2m-1})\dots(1-q^{2\nu-2m-2})}{(1-q^{-\gamma-2m})\dots(1-q^{\nu-1-\gamma-2m})},$$

wo, wie Bd. 34 Formel (83.), Ω die Eigenschaften besitzt, dafs

$$\Omega(a) = (1-q^a)\Omega(a-1)$$

und dafs $\Omega(0)$ gleich 1 wird.

Würde man $m = \infty$ setzen, so würde sich ergeben, dafs der Quotient der beiden Reihen, welchen wir hier betrachtet haben, gleich

$$\frac{1+\frac{(xq^{\gamma+1})^1}{(1-q)(1-q^{\gamma+1})}+\frac{(xq^{\gamma+2})^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})}+\cdots}{1+\frac{(xq^{\gamma})^1}{(1-q)(1-q^{\gamma})}+\frac{(xq^{\gamma+1})^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}+\cdots}$$

wird. Diese überraschende Beziehung zeigt sich übrigens als einfache Folgerung des Satzes Bd. 34, V. Abschnitt, No. XVIII, welcher die Erweiterung des *Euler*schen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

enthält, und aus dem folgt, dafs für $k = \infty$

$$\varphi(k, k, \gamma, x) = \varphi(k, 1, 1, x)\varphi(\gamma-k, \gamma-k, \gamma, q^{2k-\gamma}x),$$
$$\varphi(k, k, \gamma+1, x) = \varphi(k, 1, 1, x)\varphi(\gamma+1-k, \gamma+1-k, \gamma, q^{2k-\gamma-1}x).$$

Es stimmen also die beiden Quotienten so überein, dafs ihre Zähler und ebenso ihre Nenner sich nur durch den Factor

$$\varphi(k, 1, 1, x) = 1+\frac{x}{1-q}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots$$

von einander unterscheiden.

Halle, September 1859.

Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante.

(Von Herrn *Kronecker*.)

Die Untersuchung derjenigen elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, hat mir höchst merkwürdige Formeln für die Anzahl der verschiedenen nicht äquivalenten Classen quadratischer Formen von negativer Determinante geliefert. Einige von diesen Formeln habe ich bereits in einer Notiz mitgetheilt, welche in dem Monatsberichte der hiesigen Akademie vom October 1857 abgedruckt ist; und zwar habe ich dort, da es mir nur darauf ankam den allgemeinen Character der Formeln anschaulich zu machen, diejenigen ausgewählt, welche sich mit einfachen Bezeichnungen geben lassen. In dem Folgenden werde ich aber die erwähnten Formeln *sämmtlich* aufstellen und führe zu diesem Zwecke mehrere Bezeichnungen ein:

Es bedeute n eine beliebige positive ganze Zahl, m eine beliebige positive ungrade Zahl, r eine beliebige positive Zahl von der Form $8k-1$ und s eine beliebige positive Zahl von der Form $8k+1$.

Ferner sei:

$G(n)$ die Anzahl aller nicht äquivalenten Classen quadratischer Formen für die Determinante $-n$,

$F(n)$ die Anzahl der verschiedenen Classen *solcher* quadratischer Formen der Determinante $-n$, in welchen wenigstens einer der beiden äufseren Coefficienten ungrade ist;

$X(n)$ sei die Summe aller *ungraden* Divisoren von n,

$\Phi(n)$ die Summe *sämmtlicher* Divisoren von n,

$\Psi(n)$ der Betrag, um welchen die Summe der Divisoren von n, die gröfser als $\sqrt{n}$ sind, die Summe derjenigen übersteigt, die kleiner als $\sqrt{n}$ sind,

$\Phi'(n)$ die Summe der Divisoren von n, die von der Form $8k\pm1$ sind, vermindert um den Betrag der Summe derjenigen, die von der Form $8k\pm3$ sind;

$\Psi'(n)$ die Summe der Divisoren $8k\pm1$, die gröfser als $\sqrt{n}$, und der Divisoren $8k\pm3$, die kleiner als $\sqrt{n}$ sind, vermindert um die Summe derer von der Form $8k\pm1$, die kleiner als $\sqrt{n}$, und derer von der Form $8k\pm3$, die gröfser als $\sqrt{n}$ sind;

$\varphi(n)$ der Betrag, um welchen die Anzahl der Divisoren von der Form $4k+1$ die Anzahl derjenigen von der Form $4k-1$ übersteigt;

$\psi(n)$ der Betrag, um welchen die Anzahl der Divisoren von der Form $3k+1$ die Anzahl derjenigen von der Form $3k-1$ übersteigt;

$\varphi'(n)$ die halbe Anzahl der verschiedenen Auflösungen der Gleichung $n = x^2 + 64y^2$ und

$\psi'(n)$ die halbe Anzahl der verschiedenen Auflösungen der Gleichung $n = x^2 + 3.64y^2$ in ganzen Zahlen, wobei aber die positiven und negativen Werthe von x und y als verschiedene und auch die Nullwerthe derselben zu berücksichtigen sind.

Nach diesen Festsetzungen lassen sich die aus der Theorie der elliptischen Functionen resultirenden Beziehungen für die Classenanzahlen der quadratischen Formen negativer Determinante folgendermaafsen ausdrücken:

I. $F(4n)+2F(4n-1^2)+2F(4n-2^2)+2F(4n-3^2)+\cdots = 2X(n)+\Phi(n)+\Psi(n)$,

II. $F(2m)+2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)+2F(2m-3^2)+\cdots = 2\Phi(m)+\varphi(m)$,

III. $F(2m)-2F(2m-1^2)+2F(2m-2^2)-2F(2m-3^2)+\cdots = -\varphi(m)$,

IV. $3G(m)+6G(m-1^2)+6G(m-2^2)+6G(m-3^2)+\cdots = \Phi(m)+3\Psi(m)+3\varphi(m)+2\psi(m)$,

V. $2F(m)+4F(m-1^2)+4F(m-2^2)+4F(m-3^2)+\cdots = \Phi(m)+\Psi(m)+\varphi(m)$,

VI. $2F(m)-4F(m-1^2)+4F(m-2^2)-4F(m-3^2)+\cdots = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}(\Phi(m)-\Psi(m))+\varphi(m)$,

VII. $2F(r)-4F(r-4^2)+4F(r-8^2)-4F(r-12^2)+\cdots = (-1)^{\frac{1}{8}(r-7)}(\Phi'(r)-\Psi'(r))$,

VIII. $4\Sigma(-1)^{\frac{1}{16}(s-k^2)}\left(2F\left(\frac{s-k^2}{16}\right)-3G\left(\frac{s-k^2}{16}\right)\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(s-1)}(\Phi'(s)-\Psi'(s))+\varphi(s)$
$+4\psi(s)-4\varphi'(s)-8\psi'(s)$.

In den ersten sieben dieser Formeln ist die Reihe der Functionen F und G nur so weit fortzusetzen, als die dazu gehörigen Zahlen nicht negativ werden, so dafs, wenn man z. B. das letzte Glied in der ersten Formel mit $F(4n-k^2)$ bezeichnet, die Zahl k durch die Bedingung $k^2 \leqq 4n$ bestimmt wird. In der letzten Formel (VIII.) bezieht sich das Summenzeichen auf alle diejenigen verschiedenen positiven Zahlen k, für welche $\frac{1}{16}(s-k^2)$ ganz und gröfser oder gleich Null ist; und in allen Formeln ist $F(0) = 0$, aber $G(0) = \frac{1}{4}$ zu setzen.

Für die zahlentheoretischen Functionen F und G bestehen aufserdem folgende Fundamental-Beziehungen, welche ebenfalls aus der Theorie der

elliptischen Functionen sich ergeben, aber auch mittelst einfacher arithmetischer Betrachtungen hergeleitet werden können:

$F(4n) = 2F(n)$ für jede beliebige Zahl n,

doch mit der Ausnahme, dafs, wenn n ein ungrades Quadrat, $F(4n) = 2F(n) - 1$ ist;

$G(4n) = F(4n) + G(n)$ für jede beliebige Zahl n;

$G(n) = F(n)$, wenn n für den Modul 4 den Rest 1 oder 2 läfst;

$G(n) = 2F(n)$, wenn $n \equiv 7 \pmod 8$;

$3G(n) = 4F(n)$, wenn $n \equiv 3 \pmod 8$,

jedoch mit der Ausnahme, dafs, wenn n das Dreifache eines ungraden Quadrats ist, $3G(n) = 4F(n) + 2$ wird.

Es ist ferner die Classenanzahl $F(n)$ gleich der Summe der Anzahlen der *eigentlich primitiven* Classen quadratischer Formen für alle diejenigen Determinanten $-\nu$, welche Theiler von n sind und für welche der Quotient $\frac{n}{\nu}$ ein ungrades Quadrat ist. In Folge dessen lassen sich aus den obigen acht Formeln für die Classenanzahlen F und G folgende entsprechende Formeln für die Function $f(n)$ ableiten, welche die Anzahl der eigentlich primitiven Classen quadratischer Formen der Determinante $-n$ bezeichnen soll:

(1.) $u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \cdots = 4X(n) + 2\Phi(n) + 2\Psi(n)$,

wo u_k die Anzahl aller möglichen Darstellungen der Zahl $4n$ durch die Form: $x^2 + k(2y+1)^2$ bedeutet, also da $u_k = 0$ wird, wenn $k > 4n$, die Reihe auf der linken Seite abbricht. Jene Anzahl der Darstellungen wird übrigens hier, wie im Folgenden überall, in dem gewöhnlichen Sinne genommen; nämlich so, dafs darunter die Anzahl der verschiedenen Systeme positiver oder negativer ganzzahliger Werthe der Unbestimmten x und y verstanden wird, für welche die Darstellung möglich ist. Es ist nun:

(2.) $u_1 f(1) + u_2 f(2) + u_3 f(3) + u_4 f(4) + \cdots = 4\Phi(m) + \frac{1}{2}u_1$,

(3.) $u_1 f(1) - u_2 f(2) + u_3 f(3) - u_4 f(4) + \cdots = \frac{1}{2}u_1$,

wenn die Anzahl der Darstellungen von $2m$ durch die Form: $x^2 + k(2y+1)^2$ mit u_k bezeichnet wird. Ferner ist:

(4.) $3\Sigma u_i f(i) + \Sigma(2 + (-1)^i) u_{4i-1} f(4i-1) = 2\Phi(m) + 6\Psi(m) + \frac{1}{2}(u_0 + 3u_1)$,

wo sich die Summationen auf alle positiven Zahlen i erstrecken, und u_k die Anzahl derjenigen Darstellungen von m durch die Form: x^2+ky^2 bedeutet, bei welchen y von Null verschieden ist. Man hat ferner:

(5.) $u_1f(1)+u_2f(2)+u_3f(3)+u_4f(4)+\cdots = \Phi(m)+\Psi(m)+\frac{1}{2}u_1,$

(6.) $u_1f(1)-u_2f(2)+u_3f(3)-u_4f(4)+\cdots = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}(\Phi(m)-\Psi(m))+\frac{1}{2}u_1,$

wenn u_k die Anzahl der Darstellungen von m durch die Form: $x^2+k(2y+1)^2$ angiebt. Ferner ist, wenn $r\equiv 7 \pmod 8$:

(7.) $$2\Sigma u_{8i-1}f(8i-1) = \Psi(r)-\tfrac{1}{2}\Phi(r)+(-1)^{\frac{1}{8}(r+1)}(\Psi'(r)-\Phi'(r)),$$

wo sich die Summation auf alle positiven Zahlen i erstreckt, und u_k die Anzahl der Darstellungen von r durch die Form: $64x^2+ky^2$ bedeutet. Endlich ist, wenn $s\equiv 1 \pmod 8$:

(8.) $$\Sigma(3u_i\pm v_i)f(i)+\Sigma(2\pm 1)(u_{4i-1}-v_{4i-1})f(4i-1)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{8}(s+7)}(\Phi'(s)-\Psi'(s))+\tfrac{1}{2}(u_0+3u_1-v_1),$$

wo sich die beiden Summationszeichen auf alle positiven Zahlen i beziehen und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem i grade oder ungrade ist, wo ferner u_k die Anzahl der Darstellungen von s durch die Form: x^2+64ky^2, bei welchen y von Null verschieden ist, und v_k die Anzahl aller Darstellungen von s durch die Form: $x^2+16k(2y+1)^2$ bedeutet.

Die oben für die Classenanzahlen F und G gegebenen acht Formeln werden insoweit vereinfacht, dafs auf der rechten Seite derselben die Ausdrücke φ, ψ, φ', ψ' überall gänzlich fortfallen, wenn man die zahlentheoretischen Functionen $F(n)$ und $G(n)$ durch andere: $\mathrm{F}(n)$ und $\mathrm{G}(n)$ ersetzt, welche für $n=0$ respective die Werthe: 0 und $-\frac{1}{12}$ haben und für alle positiven Werthe von n durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$\mathrm{F}(4n)=F(4n)$ für jede beliebige Zahl n,

$\mathrm{F}(4n)=2\mathrm{F}(n)$ und $\mathrm{G}(4n)=\mathrm{F}(4n)+\mathrm{G}(n)$ für jede positive Zahl n;

$\mathrm{G}(n)=\mathrm{F}(n)$, wenn $n\equiv 1$ oder $2 \pmod 4$ und

$\mathrm{G}(n)=(2+(-1)^{\frac{1}{4}(n-3)})\mathrm{F}(n)$, wenn $n\equiv 3 \pmod 4$ ist.

Es bestehen demgemäfs für die Functionen F und G *dieselben* Fundamentalbeziehungen wie für die Classenanzahlen F und G, aber ohne die Ausnahmen; und die Functionen $\mathrm{F}(n)$ und $F(n)$ stimmen überhaupt überein, sobald nicht n ein ungrades Quadrat, $\mathrm{G}(n)$ und $G(n)$ stimmen mit einander überein, sobald nicht n irgend ein vollständiges Quadrat oder das Dreifache eines sol-

chen ist. Aber auch für diese besonderen Werthe von n haben die Functionen $F(n)$ und $G(n)$ ihre unmittelbare zahlentheoretische Bedeutung, deren Erörterung indessen hier zu weit führen würde.

Aufser den erwähnten Veränderungen, welche die obigen Formeln (I bis VIII) durch Einführung der zahlentheoretischen Functionen: $f(n)$, $F(n)$, $G(n)$ und anderer erfahren, kann man die Formeln auch dadurch in der mannigfaltigsten Weise umgestalten, dafs man sie unter sich so wie mit den für die Functionen F und G bestehenden Fundamentalrelationen combinirt; und man erhält dadurch viele neue elegante Formeln. Aber keine der Gleichungen (I. bis VIII.) *selbst* läfst sich aus den übrigen durch blofse Benutzung jener Fundamental-Beziehungen ableiten, und sie bilden also insofern ein System von unter einander unabhängigen Formeln. Von den durch Verbindung derselben resultirenden Gleichungen hebe ich nur die folgenden beiden hervor, indem ich dabei der gröfseren Einfachheit wegen die Functionen F und G benutze und $2F(n)-G(n)=E(n)$ setze:

IX. $F(n)+F(n-2)+F(n-6)+F(n-12)+F(n-20)+\cdots=\frac{1}{8}\Psi(4n+1)$,

X. $E(n)+2E(n-1)+2E(n-4)+2E(n-9)+\cdots=\frac{2}{3}(2+(-1)^n)X(n)$.

Beide Formeln gelten für jede positive Zahl n; die letztere derselben ergiebt, wie ich unten zeigen werde, die merkwürdigen Beziehungen zwischen der Anzahl der Darstellungen einer Zahl n als Summe von drei Quadraten und der zur Determinante $-n$ gehörigen Classenanzahl quadratischer Formen; die Formel X. läfst sich auch andrerseits aus diesen Beziehungen ableiten, sie enthält also bereits bekannte zahlentheoretische Sätze nur in neuer Form. Dasselbe ist bei den Formeln II. und III. der Fall, so wie überhaupt bei allen denjenigen Verbindungen der Formeln I. bis VIII., aus welchen die Functionen Ψ und Ψ' wegfallen. Die übrigen in jenen Formeln enthaltenen Resultate aber lassen sich mit den vorhandenen arithmetischen Hülfsmitteln nicht herleiten und sind also der Form wie dem Inhalt nach durchaus neu. Der wesentliche Unterschied, welcher hiernach zwischen den Functionen X, Φ, Φ' einerseits und Ψ, Ψ' andrerseits begründet wird, tritt übrigens auch in der gänzlich verschiedenen Natur der Reihen hervor, welche man erhält, wenn man jene Functionen als Entwickelungscoefficienten darstellt. Es ist nämlich:

$$\Sigma(2\pm1)X(n)q^n=\Sigma\frac{q^n}{(1\pm q^n)^2},$$

wo sich die Summationen auf alle positiven Werthe $n=1$ bis ∞ erstrecken,

und auf beiden Seiten das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n grade oder ungrade ist. Ferner:

$$\Sigma\Phi(n)q^n = \Sigma\frac{nq^n}{1-q^n} = \Sigma\frac{q^n}{(1-q^n)^2},$$

$$\Sigma\Psi(n)q^n = \Sigma\frac{q^{n^2+n}}{(1-q^n)^2},$$

wo sich die Summationen ebenfalls auf alle positiven Werthe von $n=1$ bis ∞ erstrecken. Endlich ist:

$$\Sigma\Phi'(m)q^m = \Sigma(-1)^{\frac{1}{8}(m^2-1)}\frac{mq^m}{1-q^{2m}},$$

$$\Sigma\Psi'(m)q^m = \Sigma(-1)^{\frac{1}{8}(m^2+7)}m\frac{q^{m^2}(1+q^{2m})-q^m}{1-q^{2m}},$$

wo für m alle positiven ungraden Zahlen zu nehmen sind.

Verbindet man diese Gleichungen mit den acht Formeln für die Classenanzahlen der quadratischen Formen von negativen Determinanten, so erhält man auch diese als Entwickelungscoefficienten dargestellt. Namentlich ergeben die erste und dritte obiger Gleichungen in Verbindung mit den Formeln IX. und X. die beiden folgenden Relationen:

$$\text{XI.} \qquad \Sigma F(n)q^n = \frac{q^{\frac{1}{4}}}{H(K)}\Sigma\frac{q^{n^2+3n+1}}{(1-q^{2n+1})^2},$$

$$\text{XII.} \qquad 12\Sigma E(n)q^n = \frac{1}{\Theta(K)} + \frac{8}{\Theta(K)}\Sigma\frac{q^{n+1}}{(1\mp q^{n+1})^2},$$

wo sich die Summationen auf alle Werthe von $n=0$ bis ∞ beziehen und in der letzten Summe das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n grade oder ungrade ist. Die Buchstaben H, Θ, K und q haben hier die ihnen von *Jacobi* beigelegte Bedeutung; die letztere der beiden Gleichungen läfst sich deshalb durch Benutzung der Formel (8.) pag. 103 von *Jacobi*s „Fundamenta" in folgende verwandeln:

$$12\Sigma E(n)q^n = (\Theta(K))^3 = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^3;$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar, dafs die Anzahl der Darstellungen einer Zahl n, als Summe von drei Quadraten, gleich $12E(n)$ ist. Dieses aus der Theorie der elliptischen Functionen hervorgehende Resultat enthält in einfacher Zusammenfassung die schon oben erwähnten *Gaufs*ischen Sätze über den Zusammenhang, welcher zwischen der Anzahl der Darstellungen einer Zahl n durch die Form: $x^2+y^2+z^2$ und der Anzahl der verschiedenen Classen binärer quadratischer Formen der Determinante $-n$ besteht. Auf

diese Weise können also aus der Theorie der elliptischen Functionen *allein* jene schönen Sätze der höheren Arithmetik geschöpft werden, welche bisher nur durch die tief liegenden Betrachtungen in *Gaufs* Disq. arithm. begründet waren. Da der *Fermat*sche Satz über die Triagonalzahlen eine einfache Consequenz jener Sätze bildet, so ist also auch dieser aus der Theorie der elliptischen Functionen ohne alle zahlentheoretische Vorbereitung herzuleiten, und hiermit ein von *Jacobi* in seinen Vorlesungen oftmals ausgesprochener Wunsch erfüllt. — Dieser grofse Mathematiker fand nämlich, wie bekannt, in seiner bedeutendsten analytischen Schöpfung, der Theorie der elliptischen Functionen, zugleich eine reiche Quelle zahlentheoretischer Sätze, und er scheint grade diese mit Vorliebe daraus entwickelt zu haben. So wie er nun aus den Reihen für die graden Potenzen von $\Theta(K)$ die Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate erlangt hatte, wünschte er auch aus der Entwickelung des Cubus von $\Theta(K)$ oder ähnlichen Reihen die Sätze über die Zerfällung einer Zahl in drei Quadrate und in drei Triagonalzahlen abzuleiten. Dies ist in den oben angedeuteten Untersuchungen nunmehr geschehen; freilich nicht durch directe analytische Umformung des Cubus von $\Theta(K)$, sondern mit Hülfe der speziellen Moduln, für welche complexe Multiplication stattfindet, also doch immerhin durch Betrachtungen, welche ausschliefslich dem Gebiete der elliptischen Functionen angehören.

Es deutet Alles darauf hin, dafs, wie die zahlentheoretischen Functionen $E(n)$ und $X(n)$ mit der Anzahl der Zerfällungen von n in drei und vier Quadraten zusammenhängen, so auch den Functionen $F(n)$ und $\Psi(n)$ eine ähnliche Bedeutung für die Darstellung von n durch quadratische Formen mit mehreren Variabeln zukommt. Nur aus einer solchen anderweiten zahlentheoretischen Bedeutung von $F(n)$ und $\Psi(n)$ dürfte man auf rein arithmetischem Wege die gegenseitigen Beziehungen derselben herleiten können, welche in den obigen acht Formeln enthalten sind. Indessen ist zu vermuthen, dafs die betreffende Eigenschaft der Classenanzahl $F(n)$ und somit die Begründung jener acht Formeln auf zahlentheoretischem Wege sehr tief liegt, da selbst *Gaufs* bei seiner umfassenden arithmetischen Behandlung der binären quadratischen Formen nicht auf jene einfachen Gesetze für die Classenanzahl derselben geführt worden ist. Uebrigens handelt es sich nunmehr, da die zwischen den Functionen F und Ψ bestehenden Relationen gegeben sind, nur darum, die vermuthete Eigenschaft der einen von beiden zu ermitteln, um daraus unmittelbar eine entsprechende der anderen zu erschliefsen. Und diese

Zurückführung dürfte von Wichtigkeit sein, weil die Analogie zwischen den Functionen X und Ψ einerseits und zwischen E und F andrerseits zu der Annahme berechtigt, dafs eine etwaige Bedeutung von $\Psi(n)$ für die Darstellung der Zahl n durch eine quadratische Form näher liegen wird als die entsprechende Bedeutung von $F(n)$. Namentlich auf Grund dieser Betrachtungen habe ich auch die obigen Reihen aufgestellt, in denen $F(n)$ und $\Psi(n)$ die Entwickelungscoefficienten bilden, aber es ist mir bisher noch nicht gelungen, befriedigende Resultate für die gesuchte weitere Bedeutung der Functionen F und Ψ daraus abzuleiten. Leichter scheint es, auf rein analytischem Wege die Eigenschaften der unendlichen Reihe auf der rechten Seite der Gleichung XI. insoweit zu ergründen und aufzustellen, dafs man vermittelst derselben aus dieser Gleichung allein die obigen acht Formeln sämmtlich entwickeln kann. Hierzu bedürfte es nämlich nur gewisser Umformungen, deren jene Reihe fähig ist, wenn man in derselben q mit den verschiedenen achten Wurzeln der Einheit behaftet annimmt; Umformungen, welche sich andrerseits durch Benutzung der Gleichungen I. bis VIII. ergeben.

Ich bemerke schliefslich, dafs die Formeln V. und VI. zur Berechnung der Classenanzahlen der quadratischen Formen von negativer Determinante vorzüglich geeignet sind. Ich habe auch bereits nach einer Verbindung dieser Formeln den Werth von $F(m)$ für alle ungraden Zahlen m bis zu 10000 ausrechnen lassen, wobei die Leichtigkeit und Sicherheit der Rechnung nichts zu wünschen übrig liefs. Die Anzahl der ***eigentlich primitiven*** Classen der quadratischen Formen von negativer Determinante ergiebt sich aus den berechneten Werthen von $F(m)$ mit leichter Mühe.

Berlin, im December 1859.

Von den Gammafunctionen und einer besonderen Art unendlicher Producte.

(Von Herrn *G. Bauer* zu München.)

Gauſs bemerkt in seiner Abhandlung „Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc." dafs die *Stirling*sche Formel für $\log(1.2.3...a)$ überhaupt für $\log\Gamma(a+1)$ gültig sei, wenn a irgend eine positive Zahl bezeichnet. In dem Aufsatze über „die Darstellung gewisser Functionen durch die *Euler*sche Summenformel" im 56sten Bande dieses Journals verificirte Herr *Lipschitz* die so verallgemeinerte *Stirling*sche Formel und bestimmte zugleich den Rest der Reihe, die sie enthält.

Ich wurde hiedurch veranlafst eine frühere Untersuchung wieder aufzunehmen, welche zum Zwecke hatte unmittelbar aus dem Integralausdruck eine convergente Reihenentwicklung für $\log\Gamma(a)$ herzustellen, und welche mich zu einem neuen Ausdruck für $\Gamma(a)$ in Form eines unendlichen Products führte. Dieses Product ist so beschaffen, dafs, wenn a wächst, die ersten Factoren unmittelbar den Näherungswerth $\sqrt{2\pi}.e^{-a}a^{a-\frac{1}{2}}$ liefern, während die übrigen Factoren gegen die Einheit convergiren, und die Entwicklung von $\log\Gamma(a)$ aus diesem Product nimmt die Form der *Stirling*schen Formel an. Man erhält hiebei zu gleicher Zeit verschiedene, so viel mir bekannt, neue independente Ausdrücke für die *Bernoulli*schen Zahlen. Andererseits läfst sich auch aus dem Producte leicht der von *Gauſs* in der oben erwähnten Abhandlung für $\Gamma(a+1)$ gegebene Ausdruck ableiten.

Durch Producte ähnlicher Art lassen sich endlich auch die Functionen $e^{\frac{\partial\log\Gamma(a)}{\partial a}}$ und $e^{\frac{1}{a}}$ darstellen, und zwar unterscheiden sich die Producte, welche diese beiden Functionen darstellen, nur in den Exponenten der einzelnen Factoren.

1. Nennen wir die Function $\frac{\partial\log\Gamma(a)}{\partial a}$, welche *Gauſs* mit $\psi(a-1)$ bezeichnet, um die Formeln gleichmäfsiger zu machen, hier $\psi(a)$, so hat man nach *Dirichlet* (Sur les intégrales *Eulériennes* Bd. 15, S. 260 dieses Journals) für $\psi(a)$ den Integralausdruck

$$(1.)\qquad \psi(a)=\int_0^\infty\left(e^{-z}-\frac{1}{(1+z)^a}\right)\frac{\partial z}{z}.$$

Aus diesem Ausdruck für $\psi(a)$ läfst sich sogleich entnehmen, dafs wenn a gegen Unendlich convergirt, $\psi(a)-\log(a)$ gegen Null convergirt. In der That ist

$$\log a = \int_0^\infty (e^{-z} - e^{-az}) \frac{\partial z}{z},$$

mithin

$$\psi(a) - \log a = \int_0^\infty \left(e^{-az} - \frac{1}{(1+z)^a}\right) \frac{\partial z}{z}$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-y} - \frac{1}{\left(1+\frac{y}{a}\right)^a} \right) \frac{\partial y}{y}.$$

Wird nun $a = \infty$, so wird $\left(1+\frac{y}{a}\right)^{-a} = e^{-y}$ in allen Elementen des Integrals, in welchen y einen endlichen Werth hat; diejenigen Elemente aber, in welchen y unendlich grofs ist, tragen ohnehin nichts zum Werthe des Integrals bei. Hierdurch ist obige Behauptung gerechtfertigt.

Differentiirt man die Gleichung (1.) nochmals nach a, und setzt

$$\frac{\partial^2 \log \Gamma(a)}{\partial a^2} = \frac{\partial \psi(a)}{\partial a} = \psi'(a),$$

so erhält man

$$\psi'(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+z)}{(1+z)^a} \frac{\partial z}{z} = -\int_0^\infty \frac{\log\left(1-\frac{z}{1+z}\right)}{(1+z)^a} \frac{\partial z}{z}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{z^{i-1}}{(1+z)^{a+i}} \partial z.$$

Das Integral $\int_0^\infty \frac{z^{i-1}}{(1+z)^{a+i}} \partial z$ ist aber bekanntlich $= \frac{\Gamma(i)\Gamma(a)}{\Gamma(a+i)} = \frac{1.2.3\ldots(i-1)}{a(a+1)\ldots(a+i-1)}$, und man hat also für $\psi'(a)$ die Reihenentwicklung

$$\psi'(a) = \frac{1}{a} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{a(a+1)} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1.2}{a(a+1)(a+2)} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1.2.3}{a(a+1)(a+2)(a+3)} + \cdots$$

oder

$$(2.) \qquad \psi'(a) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1.2.3\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)},$$

eine Reihenentwicklung, welche convergent ist für jeden positiven Werth von a.

2. ***Gaufs*** hat in der schon erwähnten Abhandlung über die hypergeometrische Reihe für $\psi'(a)$ die folgende Reihe gefunden:

$$\psi'(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \cdots = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{(a+i)^2}.$$

Es mufs mithin für jeden positiven Werth von a

$$(3.)\quad \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i+1}\cdot\frac{1.2.3\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)} = \sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{1}{(a+i)^2}$$

sein. Bevor ich weiter gehe, will ich die Gleichheit dieser beiden Reihen direct beweisen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die allgemeinere Reihe

$$(4.)\quad \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i+k}\cdot\frac{1.2.3\ldots i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i)} = f(k, a).$$

Schliefsen wir den Fall aus, wo k eine ganze negative Zahl ist, so ist diese Reihe convergent für jeden Werth von k und jeden positiven Werth von a. Für $k=0$ geht sie in die Reihe

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1.2}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots$$

über, deren Summe $=\frac{1}{a}$ ist, so dafs also

$$(5.)\quad f(0, a) = \frac{1}{a}.$$

Nun folgt aus (4.)

$$\frac{k}{a+1}f(k, a+1) = \Sigma\frac{k}{i+k}\cdot\frac{1.2.3\ldots i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i+1)},$$

$$\left(1-\frac{k}{a+1}\right)f(k, a+1) = \Sigma\frac{a+1-k}{i+k}\cdot\frac{1.2.3\ldots i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i+1)},$$

mithin

$$\left(1-\frac{k}{a+1}\right)f(k, a+1)-f(k, a) = -\Sigma\frac{1.2.3\ldots i}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i+1)}$$

$$= -\left(f(0, a)-\frac{1}{a+1}\right) = \frac{-1}{a(a+1)}.$$

Man hat also die Relation

$$(6.)\quad f(k, a) = \frac{1}{a(a+1)}+\frac{a-k+1}{a+1}f(k, a+1),$$

wodurch $f(k, a+1)$ auf $f(k, a)$ zurückgeführt wird, ausgenommen wenn $k=a+1$ ist. Andererseits giebt diese Relation durch wiederholte Substitution, da $f(k, a)$ mit wachsendem a gegen Null convergirt, für $f(k, a)$ die Reihe

$$f(k, a) =$$

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{a-k+1}{(a+1)^2(a+2)}+\frac{(a-k+1)(a-k+2)}{(a+1)(a+2)^2(a+3)}+\frac{(a-k+1)(a-k+2)(a-k+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)^2(a+4)}+\cdots,$$

welche abbricht, so oft k um eine ganze Zahl gröfser ist als a.

Für $k=1$ giebt diese Reihe

$$f(1,a) = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{a}{(a+1)^2(a+2)} + \frac{a}{(a+2)^2(a+3)} + \frac{a}{(a+3)^2(a+4)} + \cdots$$

und für $k=0$

$$f(0,a) = \frac{1}{a} = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \cdots,$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit von selbst erhellt. Aus diesen beiden Reihen folgt nun

$$\frac{1}{a}f(1,a) + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a^2(a+1)} + \frac{a+2}{(a+1)^2(a+2)} + \frac{a+3}{(a+2)^2(a+3)} + \cdots,$$

oder

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1.2.3\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)} = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{(a+i)^2},$$

was zu beweisen war.

3. Verweilen wir noch etwas bei der Reihe $f(k,a)$. Dieselbe läfst sich auf folgende Weise zerlegen:

$$\begin{aligned} f(k,a) &= \frac{1}{(1+k)(a+1)} + \sum_{i=2} \frac{1.2\ldots i-1}{(a+1)..(a+1+i-1)} - k\sum_{i=2} \frac{1}{i+k} \cdot \frac{1.2\ldots i-1}{(a+1)\ldots(a+1+i-1)} \\ &= \frac{1}{(1+k)(a+1)} + \sum_{i=1} \frac{1.2\ldots i}{(a+1)\ldots(a+1+i)} - k\sum_{i=1} \frac{1}{i+k+1} \cdot \frac{1.2\ldots i}{(a+1)\ldots(a+1+i)} \\ &= \frac{1}{(1+k)(a+1)} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \frac{k}{a+1} f(k+1, a+1). \end{aligned}$$

Es ist also

$$(7.) \qquad f(k,a) = \frac{1}{a} - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{a+1} - \frac{k}{a+1} f(k+1, a+1),$$

und aus dieser Relation und der Relation (6.) ergiebt sich

$$(8.) \qquad (a-k)f(k,a) = \frac{1}{1+k} - kf(k+1,a).$$

Mittelst dieser Gleichung ist $f(k+1,a)$ auf $f(k,a)$ zurückgeführt, oder umgekehrt, ausgenommen wenn $k=0$ oder $k=a$ ist. Ist also k eine ganze positive Zahl, so läfst sich $f(k,a)$ auf $f(1,a)$ zurückführen und hängt mithin von $\psi'(a)$ ab. Eine ähnliche Aenderung wie die, welche die Function $f(k,a)$ erleidet beim Uebergang von $k=0$ auf $k=1$, erleidet dieselbe auch beim Uebergang von $k=a+1$ auf $k=a$. Für $k=a+1$, wie überhaupt für $k=a+n$, wo n eine ganze positive Zahl, ist $f(k,a)$ eine rationale Function von a (nach Nr. 2), für $k=a$ hingegen hängt der Werth von $f(k,a)$ ebenfalls von $\psi'(a)$ ab, wie aus einer bemerkenswerthen Transformation mittelst

der Relation (7.) hervorgeht. Da nämlich, wenn k und a wächst, $f(k, a)$ gegen Null convergirt, so folgt aus dieser Relation

$$f(k,a) = \frac{1}{a} - \frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{a+1} - \frac{k}{a+1}\left(\frac{1}{a+1} - \frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{1}{a+2} - \frac{k+1}{a+2}\left(\frac{1}{a+2} - \cdots\right.\right.$$

$$= \frac{1}{a} - k\left(\frac{1}{(k+1)(a+1)} + \frac{1}{(a+1)^2}\right) + \frac{k(k+1)}{a+1}\left(\frac{1}{(k+2)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)^2}\right)$$

$$- \frac{k(k+1)(k+2)}{(a+1)(a+2)}\left(\frac{1}{(k+3)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)^2}\right) + - \cdots.$$

Mithin für $k = a$

$$f(a,a) = \frac{1}{a} - \frac{2a}{(a+1)^2} + \frac{2a}{(a+2)^2} - \frac{2a}{(a+3)^2} + - \cdots$$

$$= -\frac{1}{a} + 2a\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{(-1)^i}{(a+i)^2}$$

oder auch

$$(9.)\qquad \sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{1}{a+i}\cdot\frac{1.2.3\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)} = 2\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{(-1)^i}{(a+i)^2}.$$

Da nun

$$\Sigma\frac{(-1)^i}{(2a+i)} = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{(a+i)^2} - \Sigma\frac{1}{(2a+1)^2}$$

ist und $\Sigma\frac{1}{(a+i)^2} = \psi'(a)$, so wird

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{1}{a+i}\cdot\frac{1.2\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)} = \psi'\left(\frac{a}{2}\right) - 2\psi'(a).$$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich also, dafs die Transcendente $f(k, a)$ als bekannt angesehen werden kann für jeden Werth von k und jeden positiven Werth von a, wenn man sie für jeden Werth von k und a zwischen 0 und 1 kennt; ferner dafs sie eine rationale Function von a wird, wenn $k = 0$ oder wenn k um eine ganze Zahl gröfser als a ist; hingegen auf die Function $\frac{\partial^2 \log \Gamma(a)}{\partial a^2} = \psi'(a)$ zurückgeführt werden kann, wenn k eine ganze positive Zahl ist, so wie auch, wenn $k = a$ oder um eine ganze Zahl kleiner als a ist.

4. Kehren wir nun zur Gleichung (2.) zurück. Die Reihe, durch welche dort $\psi'(a)$ dargestellt ist, ist zwar weniger einfach, als die von *Gaufs* gegebene, allein sie hat vor dieser den Vorzug, dafs sie bei zweimaliger Integration zu convergenten Reihen führt.

Zerlegen wir den Ausdruck $\frac{1.2.3\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)}$ in Partialbrüche nach bekannten Formeln, so erhalten wir

$$(10.)\quad \frac{1.2.3\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)} = \frac{1}{a} - \binom{i}{1}\frac{1}{a+i} + \binom{i}{2}\frac{1}{a+2} - \binom{i}{3}\frac{1}{a+3} + - \cdots \pm \frac{1}{a+i},$$

wo $\binom{i}{1}$, $\binom{i}{2}$ u. s. f. den ersten, zweiten u. s. f. Binomialcoefficienten der i^{ten} Potenz bezeichnet.

Die Integration der Gleichung (2.) giebt mithin

$$\psi(a) =$$
$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{i+1}\left[\log a - \binom{i}{1}\log(a+1) + \binom{i}{2}\log(a+2) - + \cdots \pm \log(a+i)\right] + \text{const.}$$

Wir werden aber in Nr. 5 sehen, dafs die Constante der Integration hier Null ist, und es wird mithin

$$(11.)\quad \psi(a) = \log \prod_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{a(a+2)^{\binom{i}{2}}\ldots}{(a+1)^{\binom{i}{1}}(a+3)^{\binom{i}{3}}\ldots}\right]^{\frac{1}{i+1}},$$

wo Π das unendliche Product anzeigt. Die einzelnen Glieder dieses Products hängen auf sehr einfache Weise von einander ab. Nennen wir die Gröfse in der Klammer q_i, so dafs

$$(11'.)\quad \psi(a) = \log[q_0 . q_1^{\frac{1}{2}} . q_2^{\frac{1}{3}} . q_3^{\frac{1}{4}} \ldots],$$

so ist

$$q_0 = a, \qquad q_1 = \frac{a}{a+1}$$

und allgemein ist, wenn wir mit q_i' das bezeichnen, was q_i wird, wenn man darin $a+1$ statt a setzt

$$q_{i+1} = \frac{q_i}{q_i'},$$

wie sich aus der bekannten Eigenschaft der Binomialcoefficienten, nach welcher $\binom{i}{n} + \binom{i}{n+1} = \binom{i+1}{n+1}$ ist, sogleich ergiebt.

5. Untersuchen wir umgekehrt die Convergenz des Ausdrucks für $\psi(a)$. Vermöge der Relation $\binom{i}{n} = \binom{i-1}{n} + \binom{i-1}{n-1}$ hat man von $i=1$ an

$$q_i = \frac{a(a+2)^{\binom{i}{2}}\ldots}{(a+1)^{\binom{i}{1}}(a+3)^{\binom{i}{3}}\ldots} = \frac{a(a+2)^{\binom{i-1}{1}}(a+2)^{\binom{i-1}{2}}\ldots}{(a+1)(a+1)^{\binom{i-1}{1}}(a+3)^{\binom{i-1}{2}}\ldots}$$
$$= \frac{\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^{\binom{i-1}{1}}\left(1+\frac{1}{a+3}\right)^{\binom{i-1}{3}}\cdots}{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a+2}\right)^{\binom{i-1}{2}}\cdots}.$$

Bezeichnen wir nun zur Abkürzung die Gröfsen $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+2}, \ldots$ der Reihe nach mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und bilden wir das System von Gleichungen

$$\frac{1+\alpha_0}{1+\alpha_1} = 1+\beta_0, \quad \frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_2} = 1+\beta_1, \quad \frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_3} = 1+\beta_2, \quad \ldots$$
$$\frac{1+\beta_0}{1+\beta_1} = 1+\gamma_0, \quad \frac{1+\beta_1}{1+\beta_2} = 1+\gamma_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1+\gamma_0}{1+\gamma_1} = 1+\delta_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so sind $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$; $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$; $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ u. s. f. Reihen, deren Glieder respective aus β_0, γ_0, δ_0 u. s. w. hervorgehen, wenn man darin a nach und nach durch $a+1$, $a+2$, u. s. w. ersetzt, und sämmtlich von der positiven Seite her gegen die Null convergiren.

Nun folgt aus obigen Gleichungen

$$\beta_0 = \frac{\alpha_0-\alpha_1}{1+\alpha_1}, \quad \gamma_0 = \frac{\beta_0-\beta_1}{1+\beta_1}, \quad \delta_0 = \frac{\gamma_0-\gamma_1}{1+\gamma_1}, \quad \text{u. s. f.}$$

und hieraus

$$\beta_0 = (\alpha_0-\alpha_1) - \alpha_1\beta_0,$$
$$\gamma_0 = (\beta_0-\beta_1) - \beta_1\gamma_0 = (\alpha_0-2\alpha_1+\alpha_2) - (\alpha_1\beta_0-\alpha_2\beta_1) - \beta_1\gamma_0,$$
$$\delta_0 = (\gamma_0-\gamma_1) - \gamma_1\delta_0 = (\alpha_0-3\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3) - [(\alpha_1\beta_0-\alpha_2\beta_1) - (\alpha_2\beta_1-\alpha_3\beta_2)]$$
$$- (\beta_1\gamma_0-\beta_2\gamma_1) - \gamma_1\delta_0,$$

u. s. f.

Die ersten Glieder dieser Ausdrücke für $\beta_0, \gamma_0, \delta_0, \ldots$ sind nach Gleichung (10.)

$$\frac{1}{a(a+1)}, \quad \frac{1.2}{a(a+1)(a+2)}, \quad \frac{1.2.3}{a(a+1)(a+2)(a+3)}, \quad \ldots$$

Hieran reihen sich, wie man sogleich sieht, die folgenden Glieder in absteigender Ordnung. So sind die zweiten Glieder $\alpha_1\beta_0 = \frac{1}{a(a+1)(a+2)}$ und seine Differenzen, die dritten Glieder $\beta_1\gamma_0 = \frac{1}{(a+2)^2}\left(\frac{1}{a(a+2)} - \frac{1}{(a+1)(a+3)}\right)$ und seine Differenzen u. s. f. Es ergiebt sich mithin aus diesen Gleichungen, dafs die Gröfsen $\beta_0, \gamma_0, \delta_0, \ldots$ positiv sind und zwar

$$\beta_0 < \frac{1}{a(a+1)}, \quad \gamma_0 < \frac{1.2}{a(a+1)(a+2)}, \quad \delta_0 < \frac{1.2.3}{a(a+1)(a+2)(a+3)}, \quad \text{u. s. f.}$$

Nun ist aber

$$1+\beta_0 = \frac{1}{q_2}, \quad 1+\gamma_0 = \frac{1}{q_3}, \quad 1+\delta_0 = \frac{1}{q_4}, \quad \text{u. s. f.}$$

und also allgemein

$$\frac{1}{q_i} = 1 + \varepsilon \frac{1.2\ldots(i-1)}{a(a+1)\ldots(a+i-1)},$$

wo ε ein ächter positiver Bruch ist. Es ist folglich auch $\log q_i^{\frac{1}{i+1}}$ numerisch

$$< \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1.2\ldots(i-1)}{a(a+1)\ldots(a+i-1)},$$

woraus die Convergenz des Products $\Pi q_i^{\frac{1}{i+1}}$ für jeden positiven Werth von a erhellt. Zugleich ersieht man, dafs $q_i < 1$ ist für jedes i von $i = 1$ an.

Es läfst sich nun auch leicht zeigen, dafs die Constante der Integration in der Gleichung (11.) für $\psi(a)$ Null ist, wie ich dort erwähnte. Es ist nämlich nach dem Vorhergehenden $\sum_{i=1}^{i=\infty} \log q_i^{\frac{1}{i+1}}$ numerisch $< \frac{1}{2} \Sigma \frac{1.2\ldots i-1}{a(a+1)\ldots(a+i-1)}$ oder nach (5.) $< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a-1}$. Für $a = \infty$ convergirt also diese Summe gegen Null. Dasselbe ist aber auch der Fall mit $\psi(a) - \log a$, wie wir in Nr. 1 sahen. Folglich mufs die Constante der Integration in (11.) Null sein.

6. Integrirt man nun wiederum die Gleichung (11.), so erhält man auf der rechten Gleichungsseite nur Glieder der Form $\binom{i}{n}[(a+n)\log(a+n) - a]$. Aber vermöge der Relation $1 - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} - \binom{i}{3} + - \cdots = 0$, welche für jede positive ganze Zahl i gilt, heben sich die Vielfachen von a auf für jedes i, aufser für $i = 0$, und man erhält

$$\log \Gamma(a) = \log C + a \log a - a$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i+1}\left[a \log a - \binom{i}{1}(a+1)\log(a+1) + \binom{i}{2}(a+2)\log(a+2) - \cdots (a+i)\log(a+i)\right]$$

oder

$$(12.) \qquad \Gamma(a) = C.e^{-a} \prod_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{a^a (a+2)^{\binom{i}{2}(a+2)} \ldots}{(a+1)^{\binom{i}{1}(a+1)} (a+3)^{\binom{i}{3}(a+3)} \ldots} \right]^{\frac{1}{i+1}},$$

wo C die Constante der Integration ist. Bezeichnen wir die Glieder dieses Products, abgesehen vom Exponenten $\frac{1}{i+1}$, mit Q_0, Q_1, u. s. f., so ist

$$(12'.) \qquad \Gamma(a) = C e^{-a} Q_0 Q_1^{\frac{1}{2}} Q_2^{\frac{1}{3}} Q_3^{\frac{1}{4}} \ldots,$$

und man hat

$$Q_0 = a^a, \qquad Q_1 = \frac{a^a}{(a+1)^{(a+1)}}$$

und allgemein

$$Q_{i+1} = \frac{Q_i}{Q_i'},$$

wenn wieder Q_i' das bezeichnet, was Q_i wird, wenn man darin $a+1$ statt a setzt.

Obiger Ausdruck für $\Gamma'(a)$ ist ebenfalls convergent für jeden positiven Werth von a. Denn fafst man in Q_i alle Factoren zusammen, welche a im Exponenten haben, so erhält man

$$Q_i = \left[\frac{a(a+2)^{\binom{i}{2}}\ldots}{(a+1)^{\binom{i}{1}}(a+3)^{\binom{i}{3}}\ldots}\right]^a \cdot \left[\frac{(a+2)^{\binom{i-1}{1}}\ldots}{(a+1)(a+3)^{\binom{i-1}{2}}\ldots}\right]^i,$$

da allgemein $n\binom{i}{n} = i\binom{i-1}{n-1}$ ist. Nennen wir den ersten Factor A_i, den zweiten B_i, so ist nach Nr. 5 $\log A_i^{\frac{1}{i+1}}$ negativ und numerisch

$$< \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1.2\ldots(i-1)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i-1)},$$

hingegen, von $i=2$ an, $\log B_i^{\frac{1}{i+1}}$ positiv und

$$< \frac{i}{i+1} \cdot \frac{1.2\ldots(i-2)}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i-1)}.$$

Die beiden Producte

$$\Pi A_i^{\frac{1}{i+1}} \quad \text{und} \quad \Pi B_i^{\frac{1}{i+1}}$$

sind mithin convergent und folglich auch das Product $\Pi Q_i^{\frac{1}{i+1}}$. Man wird zugleich bemerken, dafs Q_i von $i=2$ an immer >1 ist, während Q_1 natürlich immer <1 ist.

Um nun die Constante der Integration C in Gleichung (12.) zu bestimmen, lassen wir a gegen ∞ convergiren, so convergirt $\log \prod_{i=2}^{i=\infty} Q_i^{\frac{1}{i+1}}$ gegen Null, also $\prod_{i=2}^{i=\infty} Q_i^{\frac{1}{i+1}}$ gegen die Einheit; $Q_1 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^a} \cdot \frac{1}{a+1}$ convergirt gegen $\frac{1}{ea}$ und es wird sodann

$$(13.) \qquad \Gamma(a) = Ce^{-a}a^a\left(\frac{1}{ea}\right)^{\frac{1}{2}} = C\frac{a^{a-\frac{1}{2}}}{e^{a+\frac{1}{2}}}$$

oder auch, wenn man $a+1$ an die Stelle von a setzt,

$$(13'.) \qquad \Gamma(a+1) = C\left(\frac{a}{e}\right)^{a+\frac{1}{2}}.$$

Mittelst dieser Gleichung und der Formel von *Wallis* ist es nun leicht die Constante C zu bestimmen. Denn bekanntlich ergiebt sich unmittelbar aus dem Integral, das $\Gamma(a)$ darstellt, die Gleichung $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, und wir werden später (Nr. 8) sehen, dafs diese Eigenschaft der Function Γ auch leicht aus Gleichung (12.) geschlossen werden kann. Aus dieser Eigenschaft folgt, wenn x eine ganze Zahl ist, $\Gamma(x+1)=1.2.3\ldots x$ und mithin, wenn x gegen Unendlich convergirt, $1.2.3\ldots x=C\left(\frac{x}{e}\right)^{x+\frac{1}{2}}$. Die Formel von *Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \lim.\frac{2.2.4.4\ldots(2x-2)\quad 2x}{1.3.3.5\ldots(2x-1)(2x-1)}$$

giebt folglich, wenn man bemerkt, dafs

$$1.2.3\ldots 2x = 2^x.1.2.3\ldots x.1.3.5\ldots(2x-1)$$

ist,

$$\frac{\pi}{2} = \lim.\frac{1}{2x}\,\frac{(1.2.3\ldots x.2^x)^4}{(1.2.3\ldots 2x)^2} = \frac{C^2}{4e},$$

woraus

$$(14.)\qquad C = \sqrt{2\pi e}$$

sich ergiebt.

7. Wie aus der Reihe $\Sigma\frac{1}{i+k}\,\frac{1.2\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)}$ für $k=1$ sich die unendlichen Producte für $e^{\psi(a)}$ und $\Gamma(a)$ ergaben, ebenso erhält man für $k=0$ den Werth anderer ähnlicher Producte. Es wird nämlich für $k=0$

$$(15.)\qquad \sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}\,\frac{1.2.3\ldots i}{a(a+1)\ldots(a+i)} = \frac{1}{a^2},$$

da diese Reihe mit der Reihe (5.) zusammenfällt, wenn man letztere mit $\frac{1}{a}$ multiplicirt. Die Integration dieser Gleichung giebt

$$-\frac{1}{a} = \sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}\left[\log a-\binom{i}{1}\log(a+1)+\binom{i}{2}\log(a+2)-+\cdots\right]$$

oder

$$(16.)\qquad e^{-\frac{1}{a}} = \prod_{i=1}^{i=\infty}\left[\frac{a(a+2)^{\binom{i}{2}}\ldots}{(a+1)^{\binom{i}{1}}(a+3)^{\binom{i}{3}}\ldots}\right]^{\frac{1}{i}}.$$

Dieses Product ist nach Nr. 5 ebenfalls convergent für jedes positive a. Die Constante der Integration ist Null, indem für $a=\infty$ beide Seiten der Gleichung (16.) gegen die Einheit convergiren. Führt man die Gröfsen q_i ein, so ist

$$(16'.)\qquad e^{-\frac{1}{a}} = q_1.q_2^{\frac{1}{2}}.q_3^{\frac{1}{3}}.q_4^{\frac{1}{4}}\ldots$$

und dieses Product unterscheidet sich nur durch die Exponenten $\frac{1}{i}$ von dem Product in (11'.), welches $e^{\psi(a)}$ darstellt.

Geht man unmittelbar von der Reihe (5.) aus, so erhält man auf gleiche Weise

$$(17.) \qquad a = \prod_{i=0}^{i=\infty}\left[\frac{(a+1)(a+3)^{\binom{i}{2}}\ldots}{(a+2)^{\binom{i}{1}}(a+4)^{\binom{i}{3}}\ldots}\right]$$

oder auch

$$a = q'_0 \cdot q'_1 \cdot q'_2 \cdot q'_3 \ldots,$$

wo q'_i wie früher das bezeichnet, was q_i wird, wenn man darin $a+1$ statt a setzt, und auch dieses Product ist nach Nr. 5 convergent für jedes positive a, indem $\log q'_i$ numerisch $< \frac{1.2\ldots i-1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+i)}$ ist.

Von der Reihe (5.) läfst sich der Rest angeben. Bricht man dieselbe vor dem n^{ten} Gliede ab, so ist derselbe $\frac{1.2.3\ldots n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$. Hieraus ergiebt sich die allgemeinere Gleichung

$$(18.) \qquad \frac{a(a+2)^{\binom{n}{2}}\ldots}{(a+1)^{\binom{n}{1}}(a+3)^{\binom{n}{3}}\ldots} = \prod_{i=n}^{i=\infty}\frac{(a+1)(a+3)^{\binom{i}{2}}\ldots}{(a+2)^{\binom{i}{1}}(a+4)^{\binom{i}{3}}\ldots},$$

welche die Gleichung (17.) als speciellen Fall in sich schliefst.

Mit Hülfe der Gleichung (18.) in Verbindung mit dem, was in Nr. 5 gesagt ist, lassen sich nun leicht Grenzen für den Fehler angeben, den man begeht, wenn man die bisher gegebenen Producte bei irgend einem Gliede abbricht. Ich will aber hierbei nicht verweilen und nur noch bemerken, dafs man die Zahl e auch durch die Gröfsen Q darstellen kann. Die Gleichung (17.) nämlich läfst sich auch so schreiben

$$a = \prod_{i=1}^{i=\infty}\left[\frac{(a+1)^{\binom{i}{1}}(a+3)^{3\binom{i}{3}}\ldots}{(a+2)^{2\binom{i}{2}}(a+4)^{4\binom{i}{4}}\ldots}\right]^{\frac{1}{i}},$$

und wenn man mit dieser Gleichung die Gleichung (16.) dividirt, nachdem man letztere in die a^{te} Potenz erhoben hat, so kommt

$$(19.) \qquad \frac{1}{e} = a\prod_{i=1}^{i=\infty}\left[\frac{a^a(a+2)^{\binom{i}{2}(a+2)}\ldots}{(a+1)^{\binom{i}{1}(a+1)}(a+3)^{\binom{i}{3}(a+3)}\ldots}\right]^{\frac{1}{i}}$$

oder

$$\frac{1}{e} = a\,Q_1\,Q_2^{\frac{1}{2}}\,Q_3^{\frac{1}{3}}\,Q_4^{\frac{1}{4}}\ldots.$$

Wie die beiden ersten Glieder des Products in (12.) für grofse Werthe von a den Näherungswerth $C\left(\frac{a}{e}\right)^{a+\frac{1}{2}}$ für $\Gamma(a+1)$ liefern, indem das Product der folgenden Factoren gegen die Einheit convergirt, ebenso geben die ersten Factoren der Producte in (16.) und (19.) den bekannten Grenzausdruck $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$ für e; und zwar giebt die erstere Gleichung $e=\left(\frac{a+1}{a}\right)^a=\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$ zu klein, die letztere $e=\left(\frac{a+1}{a}\right)^{a+1}=\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a+1}$ zu grofs, wie man aus der Natur der folgenden Factoren ersieht.

8. Mittelst der Formeln der vorhergehenden Nr. ist es nun leicht die Producte in (11.) und (12.) umzuformen und daraus die *Gaufs*schen Formeln abzuleiten.

Es war

$$\Gamma(a) = Ce^{-a}\prod_{i=0}^{i=\infty} Q_i^{\frac{1}{i+1}}$$

und Gleichung (19.) läfst sich schreiben

$$\frac{1}{e} = a\prod_{i=0}^{i=\infty} Q_{i+1}^{\frac{1}{i+1}}.$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite giebt unmittelbar

$$\Gamma(a) = \frac{C}{a}e^{-(a+1)}\prod_{i=0}^{i=\infty} Q_i'^{\frac{1}{i+1}},$$

wenn man wie früher mit Q_i' das bezeichnet, was Q_i wird, wenn man $a+1$ statt a setzt und bemerkt, dafs $Q_{i+1}=\frac{Q_i}{Q_i'}$ ist. Setzt man für $Ce^{-(a+1)}\Pi Q_i'^{\frac{1}{i+1}}$ seinen Werth $\Gamma(a+1)$, so giebt die letzte Gleichung die Fundamentalrelation $\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a)$.

Setzt man nun

$$\frac{1}{e} = (a+1)\prod_{i=0}^{i=\infty} Q_{i+1}'^{\frac{1}{i+1}}$$

und dividirt die letzte Gleichung mit dieser, so erhält man

$$\Gamma(a) = \frac{C}{a(a+1)}e^{-(a+2)}\Pi Q_i''^{\frac{1}{i+1}},$$

wo Q_i'' das bedeutet, was Q_i' wird, wenn man $a+1$ statt a setzt, oder das, was Q_i wird, wenn $a+2$ statt a gesetzt wird. So fortschreitend erhält man nach n Transformationen

$$\Gamma(a)=\frac{C}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}e^{-(a+n)}\Pi Q_i^{(n)\frac{1}{i+1}}=\frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}.$$

Läfst man n gegen Unendlich convergiren und setzt für $\Gamma(a+n)$ seinen Grenzwerth nach (13.) $= C\frac{(a+n)^{a+n-\frac{1}{2}}}{e^{a+n+\frac{1}{2}}} = C\frac{n^{a+n-\frac{1}{2}}}{e^{n+\frac{1}{2}}}$, so wird

$$\Gamma(a) = \frac{n^{a-1}}{a(a+1)\dots(a+n-1)}\, C\left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

und diese Gleichung dividirt mit dem entsprechenden Ausdruck für $\Gamma(1)$ giebt die Formel von *Gaufs*

$$\Gamma(a) = \lim.\frac{1.2.3\dots n.n^{a-1}}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}.$$

Auf gleiche Weise läfst sich die Formel für $\psi(a)$ mittelst Gleichung (16.) umformen. Man hat nämlich

$$\psi(a) = \log \prod_{i=0}^{i=\infty} q_i^{\frac{1}{i+1}}$$

und nach Gleichung (16.)

$$-\frac{1}{a} = \log \prod_{i=0}^{i=\infty} q_{i+1}^{\frac{1}{i+1}}.$$

Die beiden Gleichungen von einander abgezogen geben

$$\psi(a)+\frac{1}{a} = \log \prod_{i=0}^{i=\infty} q_i'^{\frac{1}{i+1}} = \psi(a+1),$$

wenn q_i' die ihm früher beigelegte Bedeutung hat und folglich $q_{i+1} = \frac{q_i}{q_i'}$ ist.

Nach n Transformationen hat man

$$\psi(a)+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\dots+\frac{1}{a+n-1} = \log \prod_{i=0}^{i=\infty} q_i^{(n)\,\frac{1}{i+1}} = \psi(a+n).$$

Für $n = \infty$ reducirt sich das Product auf sein erstes Glied $q_0^{(n)} = a+n$ und die vorstehende Gleichung verwandelt sich in die von *Gaufs* gegebene Formel

$$\psi(a) = \lim.\left(\log(a+n) - \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \dots - \frac{1}{a+n-1}\right).$$

9. Die hier betrachteten Producte lassen noch eine andere Transformation zu, welche die Exponenten der einzelnen Glieder ändert und die Producte etwas schneller convergirend macht. Denn da

$$\Gamma(a) = Ce^{-a}a^a \prod_{i=1}^{i=\infty} Q_i^{\frac{1}{i+1}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{e} = a\prod_{i=1}^{i=\infty} Q_i^{\frac{1}{i}},$$

so erhält man durch Division beider Gleichungen

$$(20.) \qquad \Gamma(a) = Ce^{-(a+1)}a^{a-1} \prod_{i=1}^{i=\infty} Q_i^{\frac{-1}{i(i+1)}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $a+1$ statt a, also auch Q_i' statt Q und dividirt mit der so erhaltenen Gleichung die Gleichung (20.), so wird

$$\frac{1}{e} = \left(\frac{a}{a+1}\right)^a \prod_{i=1}^{i=\infty} Q_{i+1}^{\frac{-1}{i(i+1)}} \quad \text{oder} \quad e = \left(\frac{a+1}{a}\right)^a \prod_{i=1}^{i=\infty} Q_{i+1}^{\frac{1}{i(i+1)}},$$

und die Verbindung dieser Gleichung mit Gleichung (20.) giebt

$$(21.) \qquad \Gamma(a) = Ce^{-(a+2)} \frac{(a+1)^{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}a+1}} \prod_{i=1}^{i=\infty} Q_{i+1}^{\frac{1.2}{i(i+1)(i+2)}}.$$

Man sieht, wie man so weiter fortschreiten und $\Gamma(a)$ durch ein Product darstellen könnte, in welchem die Glieder Exponenten von der Form $\frac{1.2.3\ldots n}{i(i+1)\ldots(i+n)}$ haben.

Dieselbe Transformation läfst sich auch auf die Producte in (11.) und (16.) anwenden, welche $e^{\psi(a)}$ und $e^{-\frac{1}{a}}$ darstellen.

10. Es bleibt nun noch zu zeigen, wie aus dem für $\Gamma(a)$ gefundenen Ausdruck sich $\log\Gamma(a)$ in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{1}{a}$ entwickeln läfst.

Ersetzen wir in der aus Gleichung (12.) für $\log\Gamma(a)$ sich ergebenden Reihe allgemein $\log(a+n)$ durch $\log a + \log\left(1+\frac{n}{a}\right)$, so erhält man

$$\log\Gamma(a)$$

$$= \log C + a\log a - a + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i+1}\left[a - \binom{i}{1}(a+1) + \binom{i}{2}(a+2) - \cdots \pm (a+i)\right]\log a$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i+1}\left[-\binom{i}{1}(a+1)\log\left(1+\frac{1}{a}\right) + \binom{i}{2}(a+2)\log\left(1+\frac{2}{a}\right) - + \cdots\right].$$

Nun ist aber für jedes i, von $i=1$ an,

$$(a.) \qquad 1 - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} - \binom{i}{3} + \cdots \pm \binom{i}{i} = 0$$

und ferner, wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$(b.) \qquad \binom{i}{1}1^m - \binom{i}{2}2^m + \binom{i}{3}3^m - \cdots \pm i^m = 0,$$

so oft $i > m$ ist. Vermöge dieser Gleichungen reducirt sich die erste Summe auf das Glied, das $i=1$ entspricht, und dieses auf $-\frac{1}{2}\log a$.

Die zweite Summe zerlegt sich in

$$\Sigma \frac{a}{i+1}\left[-\binom{i}{1}\log\left(1+\frac{1}{a}\right) + \binom{i}{2}\log\left(1+\frac{2}{a}\right) - + \cdots\right]$$

$$+ \Sigma \frac{1}{i+1}\left[-\binom{i}{1}1\log\left(1+\frac{1}{a}\right) + \binom{i}{2}2\log\left(1+\frac{2}{a}\right) - + \cdots\right].$$

Entwickelt man nun die einzelnen Logarithmen in Reihen nach Potenzen von $\frac{1}{a}$, wobei freilich die Convergenz verloren geht, so wird mit Berücksichtigung der Relation (b.) die erste dieser Summen

$$= -\tfrac{1}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)a^m} \sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{1}{i+1}\left[-\binom{i}{1}1^{m+1} + \binom{i}{2}2^{m+1} - \binom{i}{3}3^{m+1} + - \cdots\right]$$

und die zweite

$$= \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m a^m} \sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{1}{i+1}\left[-\binom{i}{1}1^{m+1} + \binom{i}{2}2^{m+1} - \binom{i}{3}3^{m+1} + - \cdots\right].$$

Fassen wir dies Alles zusammen und bemerken zugleich, dafs

$$\log C = \log \sqrt{2\pi e} = \log \sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{2}$$

ist, so kommt

$$(22.) \qquad \log \Gamma(a) = \log \sqrt{2\pi} + (a - \tfrac{1}{2}) \log a - a + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m E_m}{m(m+1)} \frac{1}{a^m},$$

wo

$$E_m = \sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{1}{i+1}\left[\binom{i}{1}1^{m+1} - \binom{i}{2}2^{m+1} + \binom{i}{3}3^{m+1} - + \cdots\right]$$

gesetzt ist.

Vergleicht man diese Entwicklung mit der *Stirling*schen Formel für $\log(1.2.3 \ldots a)$, so sieht man erstens, dafs $E_m = 0$ sein mufs, so oft m eine gerade Zahl ist. Bezeichnen wir ferner mit B_1, B_3, B_5, $\ldots$ B_{2m-1} die 1ste, 2te, 3te, $\ldots$ m^{te} *Bernoulli*sche Zahl, so mufs $E_m = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)} B_m$ sein, wenn m eine ungerade Zahl ist.

11. Andere, wie ich glaube, neue Relationen und independente Ausdrücke für die *Bernoulli*schen Zahlen erhält man durch die Entwicklung von $\log \Gamma(a)$ aus den in Nr. 9 gegebenen Formeln. So findet man, dafs die Summen

$$\sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{1}{i+1}\left[\binom{i}{1}1^{m+1} - \binom{i}{2}2^{m+1} + \binom{i}{3}3^{m+1} - + \cdots\right],$$

$$\sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{-1}{i(i+1)}\left[\binom{i}{1}1^{m+1} - \binom{i}{2}2^{m+1} + \binom{i}{3}3^{m+1} - + \cdots\right],$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{1.2}{i(i+1)(i+2)}\left[\binom{i+1}{1}1^{m+1} - \binom{i+1}{2}2^{m+1} + \binom{i+1}{3}3^{m+1} - + \cdots\right] + m - \tfrac{1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{-1.2.3}{i(i+1)(i+2)(i+3)}\left[\binom{i+2}{1}1^{m+1} - \binom{i+2}{2}2^{m+1} + \binom{i+2}{3}3^{m+1} - + \cdots\right]$$
$$+ \tfrac{13}{6} + m - 2^m\left(\tfrac{8}{3} - m\right)$$

u. a. m. sämmtlich $=0$ sind, wenn m gerade, und

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)} B_m, \quad \text{wenn } m \text{ ungerade.}$$

Diese Relationen lassen sich noch etwas einfacher ausdrücken. Setzen wir

$$1^m - \binom{i}{1} 2^m + \binom{i}{2} 3^m - + \cdots \pm (i+1)^m = N_i^{(m)},$$

eine Gröfse, welche vermöge der Relation (b.) auch $=0$ ist, wenn $i > m$, so lassen sich obige Relationen auch auf folgende Art schreiben

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{i}{i+1} N_{i-1}^{(m)} \\ \sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{-1}{i+1} N_{i-1}^{(m)} \\ \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1.2}{i(i+2)} N_i^{(m)} + m - \frac{1}{2} \\ \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{-1.2.3}{i(i+1)(i+3)} N_{i+1}^{(m)} + \frac{13}{6} + m - 2^m \left(\frac{8}{3} - m\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} = 0, \text{ wenn } m \text{ gerade,} \\ \\ = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)} B_m, \text{ wenn } m \text{ ungerade.} \end{array}$$

Aus der Verbindung dieser Formeln folgt sodann, dafs für jede ganze Zahl m

$$\sum_{i=1}^{i=m+1} N_{i-1}^{(m)} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{i} N_i^{(m)} = -m,$$

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{1}{i(i+1)} N_{i+1}^{(m)} = 1 + m.2^{m-1} - 2^m$$

u. a. dgl. Die hier gegebenen Ausdrücke für die *Bernoulli*schen Zahlen sind für die Berechnung derselben weniger bequem als die von *Laplace* und *Scherk* aufgestellten; sie scheinen mir aber insofern bemerkenswerth, als sie mittelst der Gröfse $N_i^{(m)}$ zusammengesetzt sind, welche in der Analyse sich öfter darbietet.

12. Was den Rest der semiconvergenten Reihe in (22.) betrifft, so möchte aus der Entwicklung in Nr. 10 nicht leicht ein einfacher Ausdruck für denselben zu ermitteln sein. Herr *Lipschitz* gab in der im Eingang erwähnten Abhandlung den genauen Rest der Reihe, wenn man dieselbe nach dem Gliede $(-1)^{n-1} \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)2n} \frac{1}{a^{2n-1}}$ abbricht, in der Form

$$(-1)^n k_n = \frac{(-1)^n.2}{(2\pi)^{2n+2}} \int_0^\infty \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{y^{2n} e^{-ay}}{i^{2n}\left(i^2 + \frac{y^2}{4\pi^2}\right)} \partial y.$$

Ich gelangte schon vor langer Zeit auf anderem Wege zu der einfacheren Form

$$(23.) \qquad R_n = \frac{-1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\log(1-e^{-2\pi a x})}{1+x^2}\, x^{2n}\, \partial x,$$

welche sich übrigens auch sogleich aus der von Herrn *Lipschitz* gegebenen Form herleiten läfst. Es reicht hin in derselben $2\pi.ix$ an die Stelle von y zu setzen, wodurch die Ausführung der Summation ermöglicht wird. Der Rest R_n ist, wie Herr *Lipschitz* schon bemerkte, kleiner als $\frac{B_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{a^{2n+1}}$. Dies läfst sich auch leicht aus der Form (23.) des Restes nachweisen. Ist nämlich n eine ganze Zahl, so ist

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{2n}\, \partial x = \frac{1.2.3\ldots 2n}{s^{2n+1}};$$

folglich

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} s\int_0^\infty e^{-sx} x^{2n}\, \partial x = 1.2.3\ldots 2n \sum \frac{1}{s^{2n}} = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2n} B_{2n-1}.$$

Zweimalige theilweise Integration aber giebt

$$s\int_0^\infty e^{-sx} x^{2n}\, \partial x = \frac{2n(2n-1)}{s}\int_0^\infty e^{-sx} x^{2n-2}\, \partial x,$$

und hierdurch geht die letzte Gleichung in folgende über

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx} x^{2n-2}\, \partial x = \tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{2n(2n-1)} B_{2n-1}$$

oder

$$\int_0^\infty \log(1-e^{-x})\, x^{2n-2}\, \partial x = -\tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{2n(2n-1)} B_{2n-1}$$

und folglich auch

$$(24.) \qquad -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \log(1-e^{-2\pi a x})\, x^{2n}\, \partial x = \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\,\frac{1}{a^{2n+1}}.$$

Dieses Integral ist aber offenbar gröfser als das in (23.), welches den numerischen Werth des Restes darstellt.

München, im Juli 1859.

Démonstration d'un théorème de *Jacobi* par rapport au problème de *Pfaff*.

(Par M. *A. Cayley*.)

Dans le mémoire de *Jacobi* „Theoria novi multiplicatoris etc." (t. XXIX de ce Journal, 1845) on trouve p. 253 le passage que voici: „Methodum ad solvendum problema *Pfaffianum* ab ipso auctore adhibitam, data occasione observo per plures et altiores procedere integrationes quam methodus vera et genuina poscat. Quam novam methodum pro exemplo simplice explicabo. Ad aequationem differentialem

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

per duas aequationes integrandam poscit *Pfaffiana* methodus . . . integrationem completam systematis trium aequationum differentialium primi ordinis inter quatuor variabiles ac deinde unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. Illius igitur systematis Integrali uno invento, secundum illam methodum restat integratio completa duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles sive unius aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles ac deinde aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. At observo si integrali illo invento exprimatur x_4 per x_1, x_2, x_3, aequationem differentialem propositam abire in aliam linearem primi ordinis inter tres variabiles *conditioni integrabilitatis satisfacientem;* cujus integrationem vidimus (voir p. 246) absolvi posse per integrationes separatas duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Unde in locum aequationis differentialis secundi ordinis, tantum integrandae sunt duae aequationes differentiales separatae primi ordinis, quae est reductio maxime insignis; integrationi autem aequationis differentialis primi ordinis postremo praestandae omnino supersedetur. Tractatio hujus rei gravissimae completa ac generalis alii commentationi reservanda est." Le théorème dont il s'agit est énoncé dans les mots „conditioni integrabilitatis satisfacientem", mais j'ai cité le passage en entier pour montrer l'importance qu'à bon droit *Jacobi* attachait à la théorie dont ce théorème fait partie. On sait que le problème de la solution d'une équation à différences partielles du premier ordre n'est qu'un cas particulier du problème de *Pfaff* et que la solution des

équations différentielles de la Dynamique et celle d'autres systèmes est intimement liée avec la question de la solution de ce cas particulier: le problème de ***Pfaff*** est ainsi de la plus haute importance dans l'analyse. ***Jacobi*** a parlé autre part d'un mémoire sur la mecanique analytique dont il s'est beaucoup occupé, lequel aurait naturellement des rapports avec celui-là; malheureusement ni l'un ni l'autre de ces mémoires n'ont paru.

Pour démontrer le théorème, considerons l'expression différentielle

$$\nabla = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4.$$

En supposant que $a = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ soit une intégrale des équations différentielles de ***Pfaff,*** si au moyen de cette équation on exprime x_4 en fonction de (x_1, x_2, x_3, a) l'expression ∇ prendra la forme

$$\nabla_1 = Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 + A da$$

et il s'agit de faire voir que l'équation

$$Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 = 0$$

à laquelle $\nabla_1 = 0$ se réduit, lorsqu'on fait $a =$ Constante, sera intégrable au moyen d'un facteur, ou autrement dit, que l'expression $Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3$ sera de la forme $U du$, c. à d. qu'il existe une quantité u fonction de x_1, x_2, x_3, a, telle qu'en traitant a comme une constante on a

$$Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 = U du.$$

Ainsi dans cette formule du dénote $\frac{du}{dx_1} dx_1 + \frac{du}{dx_2} dx_2 + \frac{du}{dx_3} dx_3$, et si l'on veut regarder a comme variable il faudrait y écrire $du - \frac{du}{da} da$ au lieu de du; on aurait ainsi $\nabla_1 = U\left(du - \frac{du}{da} da\right) + A da$, ou en changeant la signification de A, $\nabla = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = U du + A da$, où u, a et de même U, A, seront des fonctions données de x_1, x_2, x_3, x_4; c'est en effet la forme à laquelle dans le problème de ***Pfaff*** il s'agit de réduire l'expression différentielle ∇.

Or les équations différentielles de ***Pfaff*** sont le système que voici, savoir en écrivant

$$12 = \frac{dX_1}{dx_2} - \frac{dX_2}{dx_1}, \quad \text{etc.}$$

ce qui implique $12 = -21$, $11 = 0$, etc., et en introduisant la variable auxiliaire t, qui doit être éliminée, le système est

$$\begin{aligned}
0 &= X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 \\
X_1 dt &= \quad * \quad + 12\, dx_2 + 13\, dx_3 + 14\, dx_4 \\
X_2 dt &= 21\, dx_1 \quad * \quad + 23\, dx_3 + 24\, dx_4 \\
X_3 dt &= 31\, dx_1 + 32\, dx_2 \quad * \quad + 34\, dx_4 \\
X_4 dt &= 41\, dx_1 + 42\, dx_2 + 43\, dx_3 \quad *
\end{aligned}$$

lequel ne contient que quatre équations indépendentes. On donne à ce système une forme plus symétrique en écrivant x_0 au lieu de t, et en y mettant de plus

$$X_1 = 01 = -10 \text{ etc.}$$

les équations deviennent par ce moyen

$$\begin{aligned}
0 &= \quad * \quad + 01\, dx_1 + 02\, dx_2 + 03\, dx_3 + 04\, dx_4 \\
0 &= 10\, dx_0 \quad * \quad + 12\, dx_2 + 13\, dx_3 + 14\, dx_4 \\
0 &= 20\, dx_0 + 21\, dx_1 \quad * \quad + 23\, dx_3 + 24\, dx_4 \\
0 &= 30\, dx_0 + 31\, dx_1 + 32\, dx_2 \quad * \quad + 34\, dx_4 \\
0 &= 40\, dx_0 + 41\, dx_1 + 42\, dx_2 + 43\, dx_3 \quad *
\end{aligned}$$

et on déduit delà

$$dx_0 : dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 = 1234 : 2340 : 3401 : 4012 : 0123$$

où 1234 etc. sont les fonctions de *Jacobi* que j'ai nommées „*Pfaffiens*" savoir on a

$$\begin{aligned}
1234 &= 12.34 + 13.42 + 14.23 \\
2340 &= 23.40 + 24.03 + 20.34 = \quad * \quad - X_2 34 - X_3 42 - X_4 23 \\
3401 &= 34.01 + 30.14 + 31.40 = \quad X_1 34 \quad * \quad + X_3 41 + X_4 13 \\
4012 &= 40.12 + 41.20 + 42.01 = - X_1 24 - X_2 41 \quad * \quad - X_4 12 \\
0123 &= 01.23 + 02.31 + 03.12 = \quad X_1 23 + X_2 31 + X_3 12 \quad *
\end{aligned}$$

Cette transformation se trouve en effet dans le mémoire de *Jacobi* „Ueber die *Pfaff*sche Methode etc." (t. II de ce Journal p. 347 et suivantes, 1827), où cependant *Jacobi* ne s'est pas servi de l'algorithme $X_1 = 01 = -10$ etc. au moyen duquel la forme de la solution devient si simple.

Faisons attention à présent à ce que l'équation

$$a = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

est supposée être une intégrale des équations différentielles. On en déduit d'abord $x_4 = \text{fonc.}(x_1, x_2, x_3, a)$ et de là en traitant a comme constante

$$dx_4 = \frac{dx_4}{dx_1} dx_1 + \frac{dx_4}{dx_2} dx_2 + \frac{dx_4}{dx_3} dx_3$$

équation qui doit être satisfaite par les valeurs qu'on vient de trouver pour $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4$, et qui par conséquent donne:

$$0 = 0123 - \frac{dx_4}{dx_1} 2340 - \frac{dx_4}{dx_2} 3401 - \frac{dx_4}{dx_3} 4012.$$

En y substituant pour 0123 etc. leurs valeurs, modifiées en sorte que tous les termes deviennent positifs (ce qui se fait à l'aide des relations $12 = -21$ etc.) on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_4}{dx_1}\big(\quad * \quad X_2 34 + X_3 42 + X_4 23\big) \\ +&\frac{dx_4}{dx_2}\big(X_1 43 \quad * \quad + X_3 14 + X_4 31\big) \\ +&\frac{dx_4}{dx_3}\big(X_1 24 + X_2 41 \quad * \quad + X_4 12\big) \\ +&\quad \big(X_1 32 + X_2 13 + X_3 21 \quad * \quad\big) \end{aligned}\right\} = 0$$

équation aux différences partielles à laquelle satisfait la variable x_4, lorsqu'au moyen de l'équation $a = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (qui est une intégrale des équations différentielles de *Pfaff*) elle est donnée en fonction de x_1, x_2, x_3. Nous allons voir que c'est cette dernière équation, dans laquelle est contenu le théorème dont la démonstration fait l'objet de cette note. En effet l'expression différentielle

$$\nabla = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4$$

ayant été transformée en

$$\nabla_1 = Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 + A da$$

par la substitution de a au lieu de x_4, il s'en suit qu'on a les relations:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_4 \frac{dx_4}{dx_1} \\ Y_2 &= X_2 + X_4 \frac{dx_4}{dx_2} \\ Y_3 &= X_3 + X_4 \frac{dx_4}{dx_3} \\ A &= \quad X_4 \frac{dx_4}{da}; \end{aligned}$$

la variable x_4 contenue dans les quantités X_1, X_2, X_3, X_4 doit être remplacée par son expression en fonction de x_1, x_2, x_3, a.

Cela posé, la condition pour que l'équation

$$Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 = 0$$

soit intégrable par un facteur étant désignée par

$$\mathbf{Z} = 0,$$

on sait que

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{Y}_1\left(\frac{d\boldsymbol{Y}_2}{dx_3} - \frac{d\boldsymbol{Y}_3}{dx_2}\right) + \boldsymbol{Y}_2\left(\frac{d\boldsymbol{Y}_3}{dx_1} - \frac{d\boldsymbol{Y}_1}{dx_3}\right) + \boldsymbol{Y}_3\left(\frac{d\boldsymbol{Y}_2}{dx_1} - \frac{d\boldsymbol{Y}_1}{dx_2}\right).$$

Mais d'après les relations que l'on vient d'établir on a

$$\frac{d\boldsymbol{Y}_2}{dx_3} = \frac{d\boldsymbol{X}_2}{dx_3} + \frac{d\boldsymbol{X}_2}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_3} + \left(\frac{d\boldsymbol{X}_4}{dx_3} + \frac{d\boldsymbol{X}_4}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_3}\right)\frac{dx_4}{dx_2} + \boldsymbol{X}_4\frac{d^2x_4}{dx_2\,dx_3},$$

$$\frac{d\boldsymbol{Y}_3}{dx_2} = \frac{d\boldsymbol{X}_3}{dx_2} + \frac{d\boldsymbol{X}_3}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_2} + \left(\frac{d\boldsymbol{X}_4}{dx_2} + \frac{d\boldsymbol{X}_4}{dx_4}\frac{dx_4}{dx_2}\right)\frac{dx_4}{dx_3} + \boldsymbol{X}_4\frac{d^2x_4}{dx_2\,dx_3};$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\boldsymbol{Y}_2}{dx_3} - \frac{d\boldsymbol{Y}_3}{dx_2} = 23 + 24\frac{dx_4}{dx_3} + 43\frac{dx_4}{dx_2}$$

et on trouve de même

$$\frac{d\boldsymbol{Y}_3}{dx_1} - \frac{d\boldsymbol{Y}_1}{dx_3} = 31 + 34\frac{dx_4}{dx_1} + 41\frac{dx_4}{dx_3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{Y}_1}{dx_2} - \frac{d\boldsymbol{Y}_2}{dx_1} = 12 + 14\frac{dx_4}{dx_2} + 42\frac{dx_4}{dx_1}$$

donc en ajoutant ces équations après les avoir multipliées par $\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_4\frac{dx_4}{dx_1}$, $\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_4\frac{dx_4}{dx_2}$, $\boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_4\frac{dx_4}{dx_3}$, les termes qui contiennent les produits $\frac{dx_4}{dx_1}\frac{dx_4}{dx_2}$, etc. se détruisent, et l'on obtient l'équation finale

$$\mathbf{Z} = \begin{cases} \frac{dx_4}{dx_1}\left(\quad * \quad \boldsymbol{X}_2 34 + \boldsymbol{X}_3 42 + \boldsymbol{X}_4 23\right) \\ + \frac{dx_4}{dx_2}\left(\boldsymbol{X}_1 43 \quad * \quad + \boldsymbol{X}_3 14 + \boldsymbol{X}_4 31\right) \\ + \frac{dx_4}{dx_3}\left(\boldsymbol{X}_1 24 + \boldsymbol{X}_2 41 \quad * \quad + \boldsymbol{X}_4 12\right) \\ + \quad \left(\boldsymbol{X}_1 32 + \boldsymbol{X}_2 13 + \boldsymbol{X}_3 21 \quad * \quad\right) \end{cases}$$

dont la seconde partie s'évanouit comme il a été démontré ci-dessus. Par conséquent la condition d'intégrabilité $\mathbf{Z} = 0$ se trouve remplie, ce qu'il s'agissait de prouver.

Londres, 3 septembre 1859.

Ueber den Grad der abwickelbaren Fläche, die einer Fläche m^{ter} Ordnung doppelt umschrieben ist.

(Von Herrn *Joh. Nik. Bischoff* in München.)

Es seien

$$(1.)\quad f = f_m + sf_{m-1} + s^2 f_{m-2} + \cdots + s^m f_0 = 0,$$
$$(2.)\quad \varphi = \varphi_n + s\varphi_{n-1} + s^2 \varphi_{n-2} + \cdots + s^n \varphi_0 = 0$$

die Gleichungen zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung.

Läfst man längs des Durchschnittes von (1.) und (2.) eine Berührebene der ersten Fläche hingleiten, so wird eine abwickelbare Fläche erzeugt, deren Gleichung das Ergebnifs der Elimination von x, y, z aus (1.), (2.) und den Gleichungen:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \sigma\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left\{\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + \sigma\frac{\partial f}{\partial s}\right\} = 0$$

ist. Setzt man etwa $\xi = \eta = 0$, eliminirt aus den beiden letzten Gleichungen das Verhältnifs von ζ zu σ und bezeichnet die Differentiationen nach den 4 Veränderlichen durch Indices, die den Buchstaben f, φ angehängt werden, so ergiebt sich

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_1 & f_2 & \\ f_4 f_{13} - f_3 f_{14} & f_4 f_{23} - f_3 f_{24} & f_4 f_{33} - f_3 f_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_3 \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_4 \end{vmatrix}$$

oder unter Anwendung des bekannten Theorems der homogenen Functionen und mit Berücksichtigung der Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$:

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{43} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{vmatrix}.$$

Man schliefst hieraus, dafs die Ordnung der abwickelbaren Fläche

die $mn(3m+n-6)^{\text{te}}$ ist.

Da der abwickelbaren Fläche im Allgemeinen keine Wendungsberührebene zukommen kann, weil sonst eine Berührebene der Fläche (1.) zugleich Krümmungsebene des Durchschnittes von (1.) und (2.) sein müfste, so folgt, dafs, wenn g die Ordnung, k die Klasse der abwickelbaren Fläche, d und r die Ordnungen ihrer Doppellinie und Rückkehrcurve bedeuten, man die Beziehungen hat:

$$\begin{aligned} g &= mn(3m+n-6), \\ k &= mn(m-1), \\ d &= \tfrac{1}{2}m^2n^2(3m+n-6)^2 - mn(5n+11m-26), \\ r &= 3mn(2m+n-5). \end{aligned}$$

Die Herren *Salmon* und *Schläfli* haben ersterer in den *Transactions of the Irish Academy* vol. 23, p. 464 etc., letzterer im *Quarterly Journal of Mathematics* vol. I, p. 64 und 65 als Ort derjenigen Punkte einer Fläche m^{ter} Ordnung, deren Berührebenen letztere mit Rückkehrpunkt schneiden, eine Curve R von der Ordnung $\mathfrak{r} = 4m(m-2)$ gefunden und als Ort derjenigen Punkte, deren Berührebenenschnitt zwei Doppelpunkte zukommen, eine Curve D von der Ordnung $\partial = m(m-2)(m^3-m^2+m-12)$.

Die Berührebenen der Fläche (1.) längs der Curve R umhüllen eine abwickelbare Fläche $\mathfrak{R}$, von welcher (1.) osculirt wird. Nach dem Vorhergehenden ist der Grad von $\mathfrak{R}$: $28m(m-2)^2$. Dieser Grad kann sich nur dann erniedrigen, wenn längs der Curve R zwei auf einander folgende Berührebenen von (1.) zusammenfallen oder wenn eine Berührebene von (1.) zugleich Krümmungsebene von R wird. Nach Herrn *Salmons* Bestimmung ist der Grad von $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{r} = 2m(m-2)(3m-4).$$

Daher $\mathfrak{t} = 28m(m-2)^2 - 2m(m-2)(3m-4) = 2m(m-2)(11m-24)$ die Anzahl der Berührebenen $\mathfrak{T}$ von (1.), die zugleich Krümmungsebenen von R sind. Die nämliche Anzahl giebt auch Herr *Salmon* auf directem Wege. Läfst man eine Berührebene der Fläche (1.) längs der Curve D hingleiten, so wird die der Fläche (1.) doppelt umschriebene abwickelbare Fläche $\mathfrak{D}$ erzeugt. Man erhält für ihren doppelten Grad nach dem Vorigen:

$$m(m-2)^2(m^3-m^2+m-9)(m^3-m^2+m-12).$$

Soll sich dieser Grad erniedrigen, so kann es nur dadurch geschehen, dafs längs der Curve D auf einander folgende Berührebenen von (1.) zusammenfallen oder dafs Berührebenen von (1.) zugleich Krümmungsebenen von D werden. Die Berührungspunkte solcher Ebenen gehören aber nothwendig den Curven D und R zugleich an, also ist ihre Anzahl $4m(m-2)^2(m^3-m^2+m-12)$. Diese Anzahl zerfällt nach Herrn *Salmon* 1) in die Anzahl

$$t = 2m(m-2)(11m-24)$$

derjenigen Punkte, in welchen D von R berührt wird, oder deren Berührebenen $\mathfrak{T}$ gemeinschaftliche Krümmungsebenen von D und R sind und die Fläche (1.) in vier auf einander folgenden Punkten berühren, und 2) in die Anzahl $t = 4m(m-2)(m-3)(m^3+3m-16)$ derjenigen Punkte, in welchen D von R einfach geschnitten wird, oder deren Berührebenen T blos Krümmungsebenen von D sind, also die Fläche (1.) in drei auf einander folgenden Punkten der Curve D berühren. Durch jede Berührebene $\mathfrak{T}$ wird der doppelte Grad von $\mathfrak{D}$ um 6 und durch jede Berührebene T um 3 Einheiten erniedrigt. Daher ist der Grad von $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{d} = \tfrac{1}{2}m(m-2)^2(m-3)(m^2+2m+7)(m^3-m^2+m-12).$$

München. 1859.

Zur Theorie der Elasticität.

(Von Herrn *C. Neumann* zu Halle.)

Es existiren bekanntlich zwei Methoden, um die für das Gleichgewicht und die Bewegung eines elastischen Körpers geltenden Differential-Gleichungen abzuleiten, von denen die eine von ***Navier***, die andere von ***Poisson*** herrührt. Die erste geht von der Berechnung der ***Kraft*** aus, welche ein einzelnes Molecül des Körpers von allen übrigen Molecülen empfängt, die zweite von der Berechnung des ***Druckes***, welchen ein Flächen-Element im Innern des Körpers erleidet. Im vorliegenden Aufsatze gebe ich eine dritte Methode zur Ableitung dieser Gleichungen; ich bestimme zuerst das ***Potential*** der auf ein einzelnes Molecül von allen übrigen Molecülen ausgeübten Wirkung; erhalte daraus für das Potential aller, im ganzen Körper stattfindenden, Molecular-Wirkungen zusammengenommen ein dreifaches, über den Raum des Körpers ausgedehntes, Integral; und gelange dann durch Variation dieses Integrals — in ähnlicher Weise also wie ***Gaufs*** in der Theorie der Capillarität — zu den Bedingungs-Gleichungen, welche erfüllt sein müssen, wenn sich der elastische Körper unter der Einwirkung äufserer Kräfte im Gleichgewicht befinden soll.

Die Form, in welcher sich diese Gleichungen hier darstellen, bietet für ihre Transformation auf irgend ein orthogonales Flächen-System wesentliche Vortheile; und reducirt (wie ich im zweiten Abschnitte des vorliegenden Aufsatzes darlege) die mühsame, von ***Lamé*** zu diesem Zwecke durchgeführte, Rechnung *) zum grofsen Theil auf einfache und übersichtliche Operationen.

Auf dem hier eingeschlagenen Wege bin ich, wie beiläufig bemerkt werden mag, auch zur Transformation der in Rede stehenden Differential-Gleichungen auf ein beliebiges *an*orthogonales Flächen-System gelangt; theile aber gegenwärtig von dieser Untersuchung nur denjenigen Abschnitt mit, welcher sich der Transformation auf ein orthogonales Flächen-System unmittelbar anschliefst.

*) Journal de Math. p. p. ***Liouville***. T. V. P. 313—T. VI. P. 37.

Erster Abschnitt.

Es wird sich um das Gleichgewicht eines Systems handeln, welches aus äufserst vielen, unter einander gleichen Molecülen m, m', m'' ... besteht. Das Potential der Wirkung, welche zwei derselben m, m', während des Abstandes R, auf einander ausüben, sei $= mm'\varphi(R)$; und $\varphi(R)$ eine Function, deren Werthe nur dann merklich sind, wenn R zwischen Null und einer sehr kleinen Gröfse ϱ^2 liegt; so dafs demnach die gegenseitige Einwirkung der beiden Molecüle fast vollständig aufhört, sobald ihre Entfernung gröfser als ϱ geworden ist. Dieses System von Molecülen wird in zwei verschiedenen Lagen betrachtet werden, nämlich, wie ich dieselben nennen werde, einerseits in seiner *ursprünglichen* oder *primitiven*, andererseits in seiner *neuen* Lage.

Während der primitiven Lage sollen die Molecüle gleichförmig und ohne Bevorzugung irgend welcher Richtungen durch den Raum hin vertheilt gewesen sein. Ob damals Gleichgewicht herrschte, oder ob es äufserer Kräfte bedurft hätte, um die Molecüle während jener Lage festzuhalten, mag dahin gestellt bleiben. Die damals vorhandene constante Dichtigkeit soll mit q bezeichnet werden.

Aus der hierdurch definirten primitiven Lage soll die neue Lage des Systems nach Mafsgabe dreier Functionen u, v, w der Argumente x, y, z in der Art abgeleitet sein, dafs irgend ein Molecül, welches ursprünglich die Coordinaten x, y, z hatte, bei dieser neuen Lage des Systems die Coordinaten $x+u(x,y,z)$, $y+v(x,y,z)$, $z+w(x,y,z)$ besitzt.

Zugleich bemerke ich, dafs ich den Raum, welchen die Molecüle während ihrer ursprünglichen Lage erfüllt haben, und die Grenzfläche dieses Raumes respective den „Raum O" und die „Fläche O" nennen; ferner, dafs ich in analoger Weise die Ausdrücke „Raum Ω" und „Fläche Ω" für die neue Lage des Systems gebrauchen werde; endlich, dafs ich die neuen Coordinaten der Molecüle mit ξ, η, ζ bezeichnen werde; während, wie bereits geschehen, x, y, z die ursprünglichen Coordinaten derselben genannt werden sollen.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, ist nun folgende: φ, q, u, v, w sind gegeben, demnach sowohl die von Molecül zu Molecül wirkenden Kräfte als auch die oben erwähnten beiden Anordnungen des Systems bekannt. Ermittelt sollen werden die äufsern Kräfte, welche erforderlich sind, um das System während seiner neuen Lage im Gleichgewicht zu halten.

§. 1.

Das Potential der Molecular-Kräfte.

Es seien m, m' irgend zwei Molecüle des Systems, x, y, z und $x+a$, $y+b$, $z+c$ ihre primitiven Coordinaten, $a^2+b^2+c^2=R$. Hat irgend eine von der räumlichen Anordnung der Molecüle abhängige Gröfse während der *ursprünglichen* Lage des Systems den Werth p, so mag der Werth derselben Gröfse während der *neuen* Anordnung des Systems mit $p+Dp$ bezeichnet werden. Alsdann ist:

$$Dx = u(x, y, z), \qquad Dy = v(x, y, z), \qquad Dz = w(x, y, z),$$
$$D(x+a) = u(x+a, y+b, z+c), \qquad D(y+b) = \text{etc.}$$

folglich:

$$Da = u(x+a, y+b, z+c) - u(x, y, z), \qquad Db = \text{etc.}$$

mithin näherungsweise:

$$(1.) \quad \begin{cases} Da = u_1 a + u_2 b + u_3 c, \\ Db = v_1 a + v_2 b + v_3 c, \\ Dc = w_1 a + w_2 b + w_3 c, \end{cases}$$

wenn nämlich der Kürze wegen u_1, u_2, ... w_3 für $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ... $\frac{\partial w}{\partial z}$ gesetzt werden. Ferner wird:

$$R = a^2+b^2+c^2, \qquad R+DR = (a+Da)^2+\cdots,$$

mithin:

$$(2.) \quad DR = 2\alpha+\beta^2,$$

wo:

$$(3.) \quad \begin{cases} \alpha = a\,Da + b\,Db + c\,Dc, \\ \beta^2 = (Da)^2+(Db)^2+(Dc)^2. \end{cases}$$

Das Potential der Wirkung, welche die beiden Molecüle m, m' während der neuen Lage des Systems auf einander ausüben, hat den Werth:

$$mm'\varphi(R+DR)$$

oder, wenn man entwickelt und für DR den Werth (2) substituirt:

$$mm'\{\varphi(R)+(2\alpha+\beta^2)\varphi'(R)+\tfrac{1}{2}(2\alpha+\beta^2)^2\varphi''(R)+\cdots\},$$

oder näherungsweise:

$$mm'\{\varphi(R)+2\alpha\varphi'(R)+\beta^2\varphi'(R)+2\alpha^2\varphi''(R)\}.$$

Bezeichnet man daher mit $2m\mathfrak{F}$ das Potential der Gesammtwirkung, welche m von allen übrigen Molecülen empfängt, so ist:

$$2m\mathfrak{F} = m\Sigma m'\{\varphi(R)+2\alpha\varphi'(R)+\beta^2\varphi'(R)+2\alpha^2\varphi''(R)\},$$

die Summation ausgedehnt über alle auf m einwirkenden Molecüle m'; oder, wenn man für α und β^2 die aus (1.) und (3.) folgenden Werthe substituirt:

$$(4.) \quad 2m\mathfrak{F} =$$

$$m\Sigma m'\left\{\begin{array}{l}\varphi(R)+2\varphi'(R)[u_1a^2+v_2b^2+w_3c^2+(v_3+w_2)bc+(w_1+u_3)ca+(u_2+v_1)ab] \\ \quad +2\varphi''(R)[u_1a^2+v_2b^2+w_3c^2+(v_3+w_2)bc+(w_1+u_3)ca+(u_2+v_1)ab]^2 \\ \quad +\ \varphi'(R)[(u_1a+u_2b+u_3c)^2+(v_1a+v_2b+v_3c)^2+(w_1a+w_2b+w_3c)^2]\end{array}\right\}.$$

Denkt man sich die hier angedeutete Summation ausgeführt, so erhält man für das Potential $2m\mathfrak{F}$ einen aus Potenzen und Producten der 9 Gröfsen $u_1, u_2, \ldots w_3$ zusammengesetzten Ausdruck. Dabei ergeben sich für die Coefficienten mC dieses Ausdrucks Formeln von folgender Art:

$$mC = m\Sigma m' f(R)\, a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

Formeln, welche ihre Interpretation in der primitiven Anordnung des Systems finden. Bedeuten nämlich M, M' die Punkte des Raumes, in welchen sich die Molecüle m, m' während jener Anordnung des Systems befunden haben, so sind in diesen Formeln unter a, b, c die Projectionen der Linie MM' auf die Coordinaten-Achsen und unter R das Quadrat derselben zu verstehen. Die in den Formeln auszuführende Summation Σ kann auf diejenigen Punkte M' beschränkt bleiben, welche innerhalb einer, mit dem Radius ϱ um M beschriebenen, Kugel liegen, weil die durch $f(R)$ repräsentirten Functionen $\varphi(R)$, $\varphi'(R)$, $\varphi''(R)$, der Voraussetzung gemäfs, verschwinden, sobald $R > \varrho^2$ ist. Es folgt daraus, mit Rücksicht auf den isotropen Character der primitiven Anordnung, dafs die Coefficienten mC denselben Werth behalten, so lange man bei Molecülen m bleibt, für welche die eben erwähnte Kugel vollständig in das Innere des Systems fällt, dagegen variiren werden, sobald man zu Molecülen m übergeht, für welche ein Theil dieser Kugel aufserhalb der Grenze des Systems liegt; dafs demnach diese Coefficienten von den primitiven Coordinaten x, y, z des Molecüls m abhängen, nämlich Functionen von x, y, z sind, deren Werthe constant bleiben, so lange der Abstand des Punktes (x, y, z) von der primitiven Grenze des Systems gröfser als ϱ ist, deren Werthe aber zu variiren beginnen, sobald der genannte Abstand geringer wird.

Bezeichnet man mit $2mF$ den mit constanten Coefficienten versehenen Ausdruck, in welchen sich der allgemeine Werth $2m\mathfrak{F}$ des Potentials für im *Innern* liegende Molecüle m verwandelt, so ergiebt sich leicht aus (4.):

$$2F = H + 2K(u_1 + v_2 + w_3) + 3k(u_1^2 + v_2^2 + w_3^2) + 2k(v_2 w_3 + w_3 u_1 + u_1 v_2)$$
$$+ k((v_3 + w_2)^2 + (w_1 + u_3)^2 + (u_2 + v_1)^2) + K(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

oder, anders geordnet:

$$2F = H + 2K[u_1 + v_2 + w_3] + (K + 3k)[u_1 + v_2 + w_3]^2$$
$$+ (K + k)[(v_3 - w_2)^2 + (w_1 - u_3)^2 + (u_2 - v_1)^2]$$
$$+ (2K + 4k)[(v_3 w_2 - v_2 w_3) + (w_1 u_3 - w_3 u_1) + (u_2 v_1 - u_1 v_2)]$$

oder, wie ich diesen Ausdruck abkürzend bezeichnen werde:

$$(5.) \qquad 2F = H + 2K\Theta + (K + 3k)\Theta^2 + (K + k)T + (2K + 4k)\Delta,$$

wo H, K, k folgende Bedeutungen haben:

$$\begin{cases} mH = m\Sigma m' \varphi(R) \\ mK = m\Sigma m' \varphi'(R) a^2 = m\Sigma m' \varphi'(R) b^2 = m\Sigma m' \varphi'(R) c^2 \\ 3mk = 2m\Sigma m' \varphi''(R) a^4 = \text{etc.} \\ mk = 2m\Sigma m' \varphi''(R) b^2 c^2 = \text{etc.} \end{cases}$$

überall die Summation Σ auf eine volle Kugel vom Radius ϱ ausgedehnt. Die Werthe der Constanten H, K, k sind, wie hieraus folgt, erstens von der Beschaffenheit der Function φ und zweitens von der Gröfse desjenigen Molecular-Abstandes abhängig, welchen das System während seiner primitiven Lage besafs.

Vorläufig werde ich von dem Ausdruck $2mF$ keinen Gebrauch machen, sondern mit dem allgemein gültigen, obwohl unbekannten, Werthe $2m\mathfrak{F}$ des Potentials operiren. Bezeichnet man das Potential sämmtlicher in dem ganzen System von Molecül zu Molecül ausgeübten Wirkungen mit J, so ist, wie sich leicht ergiebt:

$$J = \tfrac{1}{2}\Sigma 2m\mathfrak{F} = \Sigma m\mathfrak{F},$$

die Summation über das ganze System hin ausgedehnt; oder näherungsweise:

$$(6.) \qquad J = q\iiint \mathfrak{F}\, dx\, dy\, dz,$$

wo q die primitive Dichtigkeit des Systems bezeichnet, und wo sich die Integration über alle Volumelemente $dx\,dy\,dz$ des Raumes O erstreckt.

§. 2.

Das virtuelle Moment der Molecular-Kräfte.

Sind δu, δv, δw unendlich kleine Incremente der Functionen u, v, w und δJ das correspondirende Increment des ebengefundenen Potentials, so

stellt dieses δJ das virtuelle Moment der Molecular-Kräfte in Bezug auf die durch δu, δv, δw repräsentirte unendlich geringe Verschiebung des Systems dar. Mit Rücksicht darauf, dafs die Grenzen des Integrals J, so wie die darin enthaltenen Coordinaten x, y, z der primitiven Lage des Systems angehörig, demnach von den Functionen u, v, w unabhängig sind, ergiebt sich sogleich:

$$(7.) \qquad \delta J = q \iiint \delta \mathfrak{F} \, dx \, dy \, dz.$$

Setzt man nun $\delta J = \delta_u J + \delta_v J + \delta_w J$, so wird:

$$\delta_u J = q \iiint \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_3} \delta u_3 \right) dx \, dy \, dz,$$

oder:

$$(8.) \qquad \delta_u J = -q \iiint \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_3} \right) \delta u \, dx \, dy \, dz$$

$$+ \text{ einem Doppel-Integral,}$$

wo sich das dreifache Integral über den Inhalt, das Doppel-Integral über die Oberfläche des Raumes O erstreckt.

Es wird erforderlich sein, das virtuelle Moment δJ der Molecular-Kräfte durch Integrale darzustellen, welche sich auf den Raum Ω beziehen, nämlich auf denjenigen Raum, welchen die Molecüle während ihrer *neuen* Lage erfüllen. Man kann zu dieser Darstellung entweder dadurch gelangen, dafs man den in (8.) für $\delta_u J$ erhaltenen Werth sowie die analogen Werthe von $\delta_v J$ und $\delta_w J$ transformirt; oder dadurch, dafs man die Transformation schon in der Formel (7.) vornimmt. Letzterer Weg führt leichter zum Ziele. Führt man an Stelle der *primitiven* Coordinaten x, y, z die mit diesen durch die Gleichungen

$$\xi = x + u(x, y, z), \qquad \eta = y + v(x, y, z), \qquad \zeta = z + w(x, y, z)$$

verbundenen *neuen* Coordinaten ξ, η, ζ ein, so verwandelt sich der in (7.) für δJ gegebene Ausdruck in folgenden:

$$\delta J = q \iiint \delta \mathfrak{F} \nabla \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

wo nämlich ∇ die von x, y, z nach ξ, η, ζ genommene Functional-Determinante vorstellt, und wo gegenwärtig die Integration über den Raum Ω ausgedehnt ist. Hieraus ergiebt sich:

$$\delta_u J = q \iiint \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_3} \delta u_3 \right) \nabla \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

oder, wenn man für δu_1, δu_2, δu_3 die Werthe:

$$\delta u_1 = \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\delta u_2 = \frac{\partial \delta u}{\partial y} = \frac{\partial \delta u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \delta u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\delta u_3 = \frac{\partial \delta u}{\partial z} = \frac{\partial \delta u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \delta u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \delta u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

einsetzt, und gleichzeitig die Abkürzungen:

$$(8^a.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_3}\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\nabla = \mathfrak{A}_1, \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_3}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\nabla = \mathfrak{A}_2, \\ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_3}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)\nabla = \mathfrak{A}_3 \end{cases}$$

eintreten läfst:

$$\delta_u \boldsymbol{J} = q\iiint\left(\mathfrak{A}_1\frac{\partial \delta u}{\partial \xi} + \mathfrak{A}_2\frac{\partial \delta u}{\partial \eta} + \mathfrak{A}_3\frac{\partial \delta u}{\partial \zeta}\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

und nunmehr durch bekannte Reduction:

$$(9.)\quad \delta_u \boldsymbol{J} = -q\iiint\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial \zeta}\right)\delta u\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$- q\iint(\mathfrak{A}_1\cos(\nu, x) + \mathfrak{A}_2\cos(\nu, y) + \mathfrak{A}_3\cos(\nu, z))\,\delta u\, d\omega,$$

wo das erste Integral über den Inhalt, das zweite über die Oberfläche des Raumes Ω ausgedehnt ist, und ν die auf einem Element $d\omega$ jener Oberfläche nach Innen errichtete Normale vorstellt.

Uebrigens ergiebt sich aus der Vergleichung der in (8.) und (9.) für $\delta_u \boldsymbol{J}$ gefundenen Werthe leicht:

$$(9^a.)\quad \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{A}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{A}_3}{\partial \zeta} = \nabla\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u_3}\right),$$

eine Formel, welche sich auch direct ohne Mühe beweisen läfst, und von welcher ich später Gebrauch machen werde.

§. 3.

Das virtuelle Moment der äufsern Kräfte.

Es mögen nun äufsere Kräfte angenommen werden, welche auf das System während seiner ***neuen*** Lage einwirken; und zwar Kräfte von zweifacher Art, nämlich erstens Kräfte $\mathfrak{Q}$, deren Gebiet sich über den ganzen

Raum Ω hin erstreckt, und zweitens Kräfte $\mathfrak{P}$, deren Wirkung auf die der Fläche Ω *nahen* Molecüle beschränkt ist.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{D}_1(a,b,c)$, $\mathfrak{D}_2(a,b,c)$, $\mathfrak{D}_3(a,b,c)$ die Componenten der Wirkung, welche die ersteren Kräfte auf die in irgend einem Punkte (a,b,c) concentrirte Massen-Einheit hervorbringen; und beachtet man, dafs ein ursprünglich im Orte (x,y,z) befindlich gewesenes Molecül m gegenwärtig den Ort $(x+u, y+v, z+w)$ inne hat: so ergiebt sich für das virtuelle Moment der auf m ausgeübten Wirkung folgender Ausdruck:

$$m\{\mathfrak{D}_1(x+u, y+v, z+w)\,\delta u+\cdots\},$$

mithin für das virtuelle Moment sämmtlicher, auf das ganze System von den Kräften $\mathfrak{D}$ ausgeübten Wirkungen folgendes, über den Raum O ausgedehnte Integral:

$$q\iiint\{\mathfrak{D}_1(x+u, y+v, z+w)\,\delta u+\cdots\}\,dx\,dy\,dz$$

oder auch, wenn man ξ, η, ζ an Stelle von x, y, z einführt, folgendes, über den Raum Ω ausgedehnte Integral:

$$(10.)\qquad q\iiint\{\mathfrak{D}_1(\xi,\eta,\zeta)\,\delta u+\cdots\}\,\nabla d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Bezeichnet man ferner, was die Kräfte $\mathfrak{P}$ anbelangt, wenn $d\omega$ ein Element der Fläche Ω ist, ξ, η, ζ die Coordinaten desselben sind und $\overline{m}$ irgend ein Molecül innerhalb des über $d\omega$ als Basis construirten Cylinders vorstellt, die Componenten der von jenen Kräften auf alle $\overline{m}$ hervorgebrachten Gesammtwirkung mit $d\omega.\mathfrak{P}_1(\xi,\eta,\zeta)$, $d\omega.\mathfrak{P}_2(\xi,\eta,\zeta)$, $d\omega.\mathfrak{P}_3(\xi,\eta,\zeta)$; so ergiebt sich für das virtuelle Moment sämmtlicher, auf das ganze System von den Kräften $\mathfrak{P}$ ausgeübten, Wirkungen folgendes über die Fläche Ω ausgedehnte Integral:

$$(11.)\qquad \iint\{\mathfrak{P}_1(\xi,\eta,\zeta)\,\delta u+\cdots\}\,d\omega,$$

in welchem, ebenso wie in (9.) und (10.), δu, δv, δw die Variation derjenigen Excursion u, v, w darstellen, welche das gegenwärtig im Punkte (ξ,η,ζ) befindliche Molecül beim Uebergange aus seiner ursprünglichen in seine neue Lage vollführt hat.

Die Addition der Formeln (10.) und (11.) giebt schliefslich für das virtuelle Moment aller äufseren Kräfte folgenden Ausdruck:

$$(12.)\quad q\iiint(\mathfrak{D}_1\delta u+\mathfrak{D}_2\delta v+\mathfrak{D}_3\delta w)\,\nabla d\xi\,d\eta\,d\zeta+\iint(\mathfrak{P}_1\delta u+\mathfrak{P}_2\delta v+\mathfrak{P}_3\delta w)\,d\omega,$$

wo zur Abkürzung $\mathfrak{D}_k$ und $\mathfrak{P}_k$ für $\mathfrak{D}_k(\xi,\eta,\zeta)$ und $\mathfrak{P}_k(\xi,\eta,\zeta)$ gesetzt sind.

§. 4.

Bestimmung der, zum Gleichgewicht erforderlichen, äufseren Kräfte.

Soll sich nun das System während seiner neuen Lage im Gleichgewicht befinden, so müssen die Kräfte $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}$ so gewählt werden, dafs das, für diese Lage und in Bezug auf sämmtliche innere und äufsere Kräfte gebildete, virtuelle Moment (nach (6.) und (12.)):

$$\delta J + q\iiint(\mathfrak{D}_1\delta u+\mathfrak{D}_2\delta v+\mathfrak{D}_3\delta w)\,\nabla\, d\xi\, d\eta\, d\zeta+\iint(\mathfrak{P}_1\delta u+\mathfrak{P}_2\delta v+\mathfrak{P}_3\delta w)\,d\omega$$

für beliebige unendlich kleine Verschiebungen δu, δv, δw verschwindet. Hieraus ergeben sich, mit Rücksicht auf den in (9.) zum Theil entwickelten Werth von δJ, sechs Gleichungen, von welchen zwei lauten:

$$(13.)\quad \begin{cases} \nabla\mathfrak{D}_1 = \dfrac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial\xi}+\dfrac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial\eta}+\dfrac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial\zeta}, \\ \mathfrak{P}_1\, d\omega = q(\mathfrak{A}_1\cos(\nu,x)+\mathfrak{A}_2\cos(\nu,y)+\mathfrak{A}_3\cos(\nu,z))\,d\omega, \end{cases}$$

die übrigen diesen analog sind. Das Resultat, zu welchem wir hiermit gelangt sind, läfst sich folgendermafsen aussprechen:

Soll sich das System während seiner neuen Lage im Gleichgewicht befinden, so mufs auf jedes einzelne Molecül m desselben eine äufsere Kraft:

$$(14.)\quad m\mathfrak{D}_1+m\lambda_1,\quad m\mathfrak{D}_2+m\lambda_2,\quad m\mathfrak{D}_3+m\lambda_3$$

einwirken, wo die $\mathfrak{D}_k$ die in (13.) aufgestellten Ausdrücke sind, und wo ferner die λ_k im Allgemeinen Null sind, nämlich nur für diejenigen Molecüle m Werthe besitzen, deren Abstand von der Grenzfläche des Systems sehr klein, und zwar noch klein im Vergleich mit der Tragweite ϱ der Molecularkraft ist. Die Werthe, welche die λ_k für diese der Oberfläche sehr nahen Molecüle *einzeln* annehmen, sind bei der eben durchgeführten Untersuchung unbekannt geblieben. Ermittelt sind nur gewisse *Summen* der λ_k; nämlich:

$$(15.)\quad \Sigma\overline{m}\lambda_1=\mathfrak{P}_1\,d\omega,\quad \Sigma\overline{m}\lambda_2=\mathfrak{P}_2\,d\omega,\quad \Sigma\overline{m}\lambda_3=\mathfrak{P}_3\,d\omega,$$

wo $d\omega$ ein Element der Grenzfläche Ω, $\overline{m}$ irgend ein Molecül innerhalb des über $d\omega$ als Basis construirten Cylinders vorstellt, Σ die über alle diese $\overline{m}$ auszudehnende Summation andeutet; und wo die $\mathfrak{P}_k$ die in (13.) aufgestellten Ausdrücke sind. Man nennt bekanntlich die Summen $\mathfrak{P}_k\,d\omega$ dieser in der Nähe der Oberfläche thätigen Kräfte *äufsere Druck-Kräfte*.

Zu bemerken ist, dafs die Werthe der $\mathfrak{D}_k$ und $\mathfrak{P}_k$, wie die Formeln (13.) und (8^a.) zeigen, von der Potential-Function $\mathfrak{F}$ abhängen, dafs demnach die weitere Entwickelung dieser Werthe zu Ausdrücken führen mufs, deren Coefficienten, ebenso wie die in §. 1 untersuchten Coefficienten von $\mathfrak{F}$

selbst, Functionen von x, y, z sind. Wollte man diese Entwickelung ausführen, so würde dazu die Kenntnifs des Werthes von $\mathfrak{F}$ selbst unumgänglich nothwendig sein.

Ich werde nun aber zeigen, wie man ohne Kenntnifs von $\mathfrak{F}$, allein auf Grund des (bereits entwickelten) Werthes von $\boldsymbol{F}$, die zum Gleichgewicht des Systems erforderlichen Kräfte bestimmen kann, sobald man den Druck-Kräften ein gröfseres Gebiet einräumt, dieselben nämlich bis zur Tiefe ϱ in das System eindringen läfst; und werde hierdurch zu denjenigen Formeln gelangen, welche ***Poisson*** zuerst aufgestellt hat, also zu Formeln, deren Coefficienten durchgängig Constante sind.

Zu diesem Zwecke müssen die Ausdrücke $\boldsymbol{A}_k$, $\boldsymbol{Q}_k$ eingeführt werden, nämlich diejenigen Ausdrücke, in welche die vermittelst der Formeln (8^a.) und (13.) definirten $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{D}_k$ übergehen, sobald man dort $\boldsymbol{F}$ an Stelle von $\mathfrak{F}$ setzt; zugleich mag bemerkt werden, dafs für die Differenzen $(\mathfrak{A}_k - \boldsymbol{A}_k)$ und $(\mathfrak{D}_k - \boldsymbol{Q}_k)$ dasselbe gilt, was nach §. 1 über den Werth der Differenz $(\mathfrak{F} - \boldsymbol{F})$ klar ist, dafs nämlich jene Differenzen, ebenso wie diese, für das Innere des Systems Null sind, und nur dann Werthe erhalten, wenn man sich der Grenze des Systems bis auf eine Entfernung nähert, die kleiner als ϱ ist.

Zerlegt man nun die Werthe (14.) der auf ein Molecül m einwirkenden äufseren Kräfte in folgender Weise:

(16.) $$m\mathfrak{D}_1 + m\lambda_1 = m\boldsymbol{Q}_1 + m(\mathfrak{D}_1 - \boldsymbol{Q}_1 + \lambda_1), \quad m\mathfrak{D}_2 + m\lambda_2 = \text{etc.},$$

so kann man, ebenso wie vorhin die Kräfte λ_k, gegenwärtig die Kräfte $(\mathfrak{D}_k - \boldsymbol{Q}_k + \lambda_k)$ als Druck-Kräfte zusammenfassen. Diese neuen Druck-Kräfte werden aber bis zur Tiefe ϱ in das System eindringen, weil, allerdings nicht die λ_k, wohl aber die $(\mathfrak{D}_k - \boldsymbol{Q}_k)$ bis zu dieser Tiefe hin Werthe besitzen. Somit ergiebt sich aus den vorstehenden Formeln (16.), dafs man, um das System während seiner neuen Lage im Gleichgewicht zu halten, an Stelle der Kräfte $\mathfrak{D}_k$ auch die durch die Ausdrücke $\boldsymbol{Q}_k$ dargestellten Kräfte anwenden kann, wenn man nur gleichzeitig an Stelle der Druck-Kräfte $\mathfrak{P}_k$ ebenfalls andere und zwar tiefer eindringendere Druck-Kräfte $\boldsymbol{P}_k$ treten läfst, nämlich diejenigen, welche durch die Formeln

$$\boldsymbol{P}_1 d\omega = \Sigma\overline{m}(\mathfrak{D}_1 - \boldsymbol{Q}_1 + \lambda_1), \quad \boldsymbol{P}_2 d\omega = \text{etc.}$$

oder auch (nach (15.)) durch die Formeln:

(17.) $$\boldsymbol{P}_1 d\omega = \Sigma\overline{m}(\mathfrak{D}_1 - \boldsymbol{Q}_1) + \mathfrak{P}_1 d\omega, \quad \boldsymbol{P}_2 d\omega = \text{etc.}$$

definirt sind. Hier ist (wie früher) unter $d\omega$ ein Element der Grenzfläche Ω, unter $\overline{m}$ irgend ein Molecül innerhalb des über $d\omega$ als Basis construirten

Cylinders, und unter Σ die über alle diese $\bar{m}$ ausgedehnte Summation zu verstehen. Uebrigens mufs die Summation bis zur Tiefe ϱ hin ausgedehnt werden; der Cylinder mufs also bis zu dieser Tiefe hinabreichen, und kann hier durch ein mit $d\omega$ paralleles Flächen-Element $d\omega_i$ geschlossen sein.

Es handelt sich nun darum, $\boldsymbol{P}_1$ aus der Formel (17.) vermittelst der in (13.) gegebenen Werthe von $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{P}_1$

$$(18.)\qquad \begin{cases} \nabla\mathfrak{D}_1 = \dfrac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial\eta} + \dfrac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial\zeta}, \\ \mathfrak{P}_1 d\omega = q(\mathfrak{A}_1\cos(\nu, x) + \mathfrak{A}_2\cos(\nu, y) + \mathfrak{A}_3\cos(\nu, z))\, d\omega, \end{cases}$$

sowie mit Hülfe des hieraus sich ergebenden Werthes von $\boldsymbol{Q}_1$

$$(19.)\qquad \nabla \boldsymbol{Q}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{A}_1}{\partial\xi} + \frac{\partial \boldsymbol{A}_2}{\partial\eta} + \frac{\partial \boldsymbol{A}_3}{\partial\zeta}$$

zu berechnen. Man kann in $\Sigma\bar{m}\mathfrak{D}_1$ den Ausdruck $\mathfrak{D}_1$ als abhängig von den primitiven Coordinaten x, y, z des Molecüls $\bar{m}$ betrachten; und erhält dann für jene Summe folgenden Werth:

$$\Sigma\bar{m}\mathfrak{D}_1 = q\iiint\mathfrak{D}_1\, dx\, dy\, dz,$$

die Integration ausgedehnt über denjenigen Raum, welchen die, gegenwärtig in dem (über $d\omega$ construirten) Cylinder befindlichen, Molecüle $\bar{m}$ während ihrer ***ursprünglichen*** Lage erfüllten; oder, wenn man nunmehr ξ, η, ζ an Stelle von x, y, z einführt:

$$\Sigma\bar{m}\mathfrak{D}_1 = q\iiint\mathfrak{D}_1\nabla\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

gegenwärtig die Integration über den Cylinder selbst ausgedehnt; oder, wenn man für $\mathfrak{D}_1\nabla$ den Werth (18.) substituirt:

$$\Sigma\bar{m}\mathfrak{D}_1 = q\iiint\left(\frac{\partial\mathfrak{A}_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\mathfrak{A}_2}{\partial\eta} + \frac{\partial\mathfrak{A}_3}{\partial\zeta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

oder endlich durch bekannte Reduction:

$$\Sigma\bar{m}\mathfrak{D}_1 = -q\iint\{\mathfrak{A}_1\cos(\boldsymbol{N}, x) + \mathfrak{A}_2\cos(\boldsymbol{N}, y) + \mathfrak{A}_3\cos(\boldsymbol{N}, z)\}\, d\boldsymbol{O},$$

wo $d\boldsymbol{O}$ irgend ein Element der Oberfläche des Cylinders, $\boldsymbol{N}$ die auf $d\boldsymbol{O}$ errichtete, in das Innere des Cylinders laufende, Normale vorstellt, und die Integration über die ganze Oberfläche des Cylinders auszudehnen ist. Hieraus aber ergiebt sich mit Fortlassung von Gliedern höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}\Sigma\bar{m}\mathfrak{D}_1 = &-q(\mathfrak{A}_1\cos(\nu, x) + \mathfrak{A}_2\cos(\nu, y) + \mathfrak{A}_3\cos(\nu, z))\, d\omega \\ &+q(\mathfrak{A}_1\cos(\nu, x) + \mathfrak{A}_2\cos(\nu, y) + \mathfrak{A}_3\cos(\nu, z))_i\, d\omega_i,\end{aligned}$$

wo ν wieder seine frühere Bedeutung hat, nämlich in beiden Termen die

Richtung der auf Ω construirten, in das Innere des Systems laufenden, Normale vorstellt, und wo ferner der erste Term die Werthe der $\mathfrak{A}_k$ für das Element $d\omega$, der zweite dagegen (wie der beigefügte Index i andeuten soll) die Werthe derselben für das Element $d\omega_i$ enthält. — In analoger Weise kann man den Werth von $\Sigma\overline{m}\,Q_1$ vermittelst der Formel (19.) berechnen. Setzt man daher abkürzend:

$$\mathfrak{A}_1\cos(\nu, x)+\mathfrak{A}_2\cos(\nu, y)+\mathfrak{A}_3\cos(\nu, z) = \mathfrak{A},$$
$$A_1\cos(\nu, x)+A_2\cos(\nu, y)+A_3\cos(\nu, z) = A,$$

so wird:

$$\Sigma\overline{m}\,\mathfrak{Q}_1 = -q\,\mathfrak{A}\,d\omega+q\,\mathfrak{A}_i\,d\omega_i,$$
$$\Sigma\overline{m}\,Q_1 = -q\,A\,d\omega+q\,A_i\,d\omega_i$$

und aufserdem nach (18.):

$$\mathfrak{P}_1\,d\omega = q\,\mathfrak{A}\,d\omega.$$

Substituirt man schliefslich diese Werthe in (17.), und beachtet, dafs die Werthe von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ mit denen von A_1, A_2, A_3 für das, in einer Tiefe ϱ unter der Oberfläche befindliche, Element $d\omega_i$ identisch sind, folglich $\mathfrak{A}_i = A_i$ ist; so ergiebt sich augenblicklich:

$$P_1\,d\omega = q\,A\,d\omega$$

das ist:

$$P_1\,d\omega = q(A_1\cos(\nu, x)+A_2\cos(\nu, y)+A_3\cos(\nu, z))\,d\omega.$$

Beachtet man aufserdem, dafs der in (19.) für Q_1 aufgestellte Werth mit Hülfe der Formel (9^a.) folgende Gestalt annimmt:

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u_3},$$

so ergeben sich für die zum Gleichgewicht des Systems erforderlichen Kräfte Q_k, P_k folgende Formeln:

(20.)
$$\begin{cases} Q_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u_1}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u_2}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial u_3}, \\ Q_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial v_1}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v_2}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial v_3}, \\ Q_3 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial w_1}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial w_2}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial w_3}, \\ P_1\,d\omega = q(A_1\cos(\nu, x)+A_2\cos(\nu, y)+A_3\cos(\nu, z))\,d\omega, \\ P_2\,d\omega = q(B_1\cos(\nu, x)+B_2\cos(\nu, y)+B_3\cos(\nu, z))\,d\omega, \\ P_3\,d\omega = q(C_1\cos(\nu, x)+C_2\cos(\nu, y)+C_3\cos(\nu, z))\,d\omega, \end{cases}$$

wo A_1, A_2, A_3 nach (8^a.) folgende Werthe haben:

$$(21.)\quad \begin{cases} A_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}(u_1+1)+\frac{\partial F}{\partial u_2}u_2 + \frac{\partial F}{\partial u_3}u_3\right)\nabla, \\ A_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}v_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}(v_2+1)+\frac{\partial F}{\partial u_3}v_3\right)\nabla, \\ A_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}w_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}w_2 + \frac{\partial F}{\partial u_3}(w_3+1)\right)\nabla, \\ \frac{1}{\nabla} = \begin{vmatrix} u_1+1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2+1 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3+1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

und wo unter B_1, B_2, B_3 und C_1, C_2, C_3 die Ausdrücke zu verstehen sind, in welche die vorstehenden, für A_1, A_2, A_3 aufgestellten, sich verwandeln, sobald man dort die $\frac{\partial F}{\partial v_i}$ und $\frac{\partial F}{\partial w_i}$ an Stelle der $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ setzt.

§. 5.

Darstellung der, zum Gleichgewicht erforderlichen, äufseren Kräfte Q und P vermittelst einer gewissen Function Φ.

Die für die Kräfte Q_k, P_k gefundenen Ausdrücke lassen sich in folgende elegante Form bringen:

$$(22.)\quad \begin{cases} Q_1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}, \\ Q_2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial v_1}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial v_2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial v_3}, \\ Q_3 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial w_1}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial w_2}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial w_3}, \\ P_1 d\omega = q\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\cos(\nu,x)+\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\cos(\nu,y)+\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\cos(\nu,z)\right)d\omega, \\ P_2 d\omega = q\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_1}\cos(\nu,x)+\frac{\partial \Phi}{\partial v_2}\cos(\nu,y)+\frac{\partial \Phi}{\partial v_3}\cos(\nu,z)\right)d\omega, \\ P_3 d\omega = q\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w_1}\cos(\nu,x)+\frac{\partial \Phi}{\partial w_2}\cos(\nu,y)+\frac{\partial \Phi}{\partial w_3}\cos(\nu,z)\right)d\omega, \end{cases}$$

wo Φ von der in (5.) aufgestellten Potential-Function F noch verschieden ist, nämlich zu jener in der Beziehung steht:

$$(22^a.)\quad \Phi = F + K\Lambda$$

und demnach folgenden Werth hat:

$$(23.)\quad 2\Phi = K + 2K\Theta + (K+3k)\Theta^2 + (K+k)T + (4K+4k)\Delta,$$

$$(24.)\quad \begin{cases} \Theta = u_1 + v_2 + w_3, \\ T = (v_3 - w_2)^2 + (w_1 - u_3)^2 + (u_2 - v_1)^2, \\ \Delta = (v_3 w_2 - v_2 w_3) + (w_1 u_3 - w_3 u_1) + (u_2 v_1 - u_1 v_2). \end{cases}$$

Aus dem Werthe von Δ ergiebt sich nämlich augenblicklich:

$$(25.)\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Delta}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Delta}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Delta}{\partial u_3} = 0$$

und daraus folgt mit Bezug auf (22ª.), dafs in der That die in (22.) für die Q_k aufgestellten Werthe mit den früheren in (20.) identisch sind.

Es bleibt demnach nur die Ableitung der für die P_k aufgestellten Werthe übrig. Zunächst ist nach (21.):

$$\frac{1}{\nabla} = 1 + (u_1 + v_2 + w_3) + \lambda = 1 + \Theta + \lambda,$$
$$\nabla = 1 - (u_1 + v_2 + w_3) + \lambda' = 1 - \Theta + \lambda',$$

wo λ, λ' Ausdrücke vorstellen, deren Glieder in Bezug auf die 9 Gröfsen u_1, u_2, ... w_3 zweiter oder dritter Dimension sind. Dieser Werth ∇ sowie der in (5.) für F aufgestellte sind in (21.) einzusetzen, und sodann A_1, A_2, A_3 zu berechnen. Dabei ist zu beachten, dafs in jenem Werthe von F die dritte Dimension und demzufolge in den $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ bereits die zweite Dimension der Gröfsen u_1, u_2, ... w_3 vernachlässigt ist, dafs aber, wie die Formeln (21.) zeigen, ein Fehler zweiter Dimension in den Werthen der $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ Fehler derselben Dimension in den Werthen der A_i hervorruft. Daraus nämlich geht hervor, dafs man bei Benutzung des in (5.) für F aufgestellten Werthes nur diejenigen Glieder in den Werthen der A_i bestimmen kann, welche in Bezug auf u_1, u_2, ... w_3 von der ***nullten*** und ***ersten*** Dimension sind. Die Auffindung dieser Glieder wird erleichtert, wenn man vermittelst der identischen Gleichungen:

$$F = (F - K\Theta) + K(u_1 + v_2 + w_3),$$
$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \frac{\partial (F - K\Theta)}{\partial u_1} + K, \quad \frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{\partial (F - K\Theta)}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial F}{\partial u_3} = \frac{\partial (F - K\Theta)}{\partial u_3}$$

in den Formeln (21.) an Stelle der $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ die $\frac{\partial (F - K\Theta)}{\partial u_i}$ einführt, und beachtet, dafs diese $\frac{\partial (F - K\Theta)}{\partial u_i}$ (nach 5.) ***keine Glieder nullter*** sondern nur Glieder erster Dimension enthalten. Alsdann ergeben sich nämlich aus (21.) für

A_1, A_2, A_3, bei Fortlassung der Glieder zweiter Dimension, sogleich folgende Werthe:

$$A_1 = \frac{\partial(F - K\Theta)}{\partial u_1} + K + Ku_1 - K\Theta = \frac{\partial F}{\partial u_1} - K(v_2 + w_3) = \frac{\partial(F + K\Delta)}{\partial u_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1},$$

$$A_2 = \frac{\partial(F - K\Theta)}{\partial u_2} + Kv_1 = \frac{\partial F}{\partial u_2} + Kv_1 = \frac{\partial(F + K\Delta)}{\partial u_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_2},$$

$$A_3 = \frac{\partial(F - K\Theta)}{\partial u_3} + Kw_1 = \frac{\partial F}{\partial u_3} + Kw_1 = \frac{\partial(F + K\Delta)}{\partial u_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}.$$

Setzt man aber diese Werthe in (20.) ein, so erhält man den in (22.) für $P_1 d\omega$ aufgestellten Ausdruck.

§. 6.

Bestimmung der innern Druck-Kräfte.

Das System befinde sich in seiner neuen Lage, begrenzt von der Fläche Ω. Im Innern des Systems werde eine zweite geschlossene Fläche Ω' von beliebiger Form construirt, welche aber von der Fläche Ω überall weiter als ϱ entfernt bleiben soll. Auf dieser Fläche werde ein kleines Element $d\omega'$ abgegrenzt; über $d\omega'$ als Basis, und zwar im Innern der Fläche Ω', ein Cylinder von der Länge ϱ construirt; und dieser Cylinder durch eine kleine mit $d\omega'$ parallele Fläche geschlossen. Die zwischen Ω und Ω' befindlichen Molecüle mögen mit m_a bezeichnet werden; ferner die im Innern von Ω' befindlichen mit m_i; endlich mögen diejenigen Molecüle m_i, welche innerhalb des eben construirten kleinen Cylinders liegen, unter einander zu einem starren System verbunden gedacht, und dieses starre System mit M_i bezeichnet werden.

Denken wir uns nun die durch die Formeln (22.) definirten Kräfte Q und P auf das System einwirkend. Das ganze System befindet sich dann im Gleichgewicht, mithin auch der Cylinder M_i. Folglich mufs die x-Componente der unter diesen Umständen auf M_i ausgeübten Wirkungen Null sein, ebenso die y-Componente und die z-Componente. Es lassen sich aber die auf M_i ausgeübten Wirkungen in drei Theile zerfällen, nämlich 1) in die von den Kräften Q, 2) in die von den Molecülen m_i und 3) in die von den Molecülen m_a ausgeübte Wirkung. Die Kräfte P nämlich haben *keinen* Einflufs auf den Cylinder, da sich derselbe, der angegebenen Construction zufolge, aufser dem Bereich jener Kräfte befindet. Bezeichnen wir daher die Componenten der beiden ersten Wirkungen zusammengenommen mit

$$\mathfrak{X}\, d\omega', \qquad \mathfrak{Y}\, d\omega', \qquad \mathfrak{Z}\, d\omega'$$

und die Componenten der dritten Wirkung mit

$$X d\omega', \qquad Y d\omega', \qquad Z d\omega',$$

so haben wir die Gleichungen:

$$\mathfrak{X} d\omega' + X d\omega' = 0, \quad \text{etc.}$$

$X d\omega'$, $Y d\omega'$, $Z d\omega'$ sind die Gröfsen um deren Bestimmung es sich handelt, nämlich, wie man augenblicklich sieht, die Componenten des auf das Element $d\omega'$ ausgeübten innern Druckes. Die aufserdem eingeführten Gröfsen $\mathfrak{X} d\omega'$, $\mathfrak{Y} d\omega'$, $\mathfrak{Z} d\omega'$ spielen bei der gegenwärtigen Untersuchung nur eine vermittelnde Rolle. Es lassen sich nämlich für diese letzteren Gröfsen noch andere Relationen aufstellen, und zwar vermittelst einer, von der vorhergehenden, unabhängigen Betrachtung, zu der ich nunmehr übergehe.

Wir denken uns die Molecüle m_a verschwunden, das System also reducirt auf die Molecüle m_i, diese aber in ungeänderter Lage, nämlich in derjenigen Lage, für welche die Functionen u, v, w mafsgebend sind. Offenbar werden die zum Gleichgewicht dieses Systems der m_i erforderlichen äufsern Kräfte wiederum durch die Formeln (22.) bestimmt. Hierbei ergeben sich, da die Functionen u, v, w ungeändert geblieben sind, für die Kräfte Q und P genau dieselben Ausdrücke wie früher; nur sind die Ausdrücke der letzteren Kräfte gegenwärtig nicht in Bezug auf Ω sondern in Bezug auf Ω' gebildet, und sollen daher zur Unterscheidung von den früheren mit P' bezeichnet werden. — Denken wir uns nun diese Kräfte Q, P' auf das System einwirkend, alle Molecüle also im Gleichgewicht, und wenden wir unsere Aufmerksamkeit wiederum auf den vorhin betrachteten kleinen Cylinder M_i. Auch gegenwärtig müssen die Componenten der auf diesen Cylinder ausgeübten Wirkungen Null sein. Diese Wirkungen zerfallen jetzt in folgende drei Theile 1) in die von den Kräften Q, 2) in die von den Molecülen m_i und 3) in die von den Kräften P' ausgeübte Wirkung. Die beiden ersten sind identisch mit den, bei der vorhergehenden Betrachtung, in erster und zweiter Stelle aufgeführten Wirkungen, da einerseits die Kräfte Q dieselben sind wie dort, andererseits auch die Anordnung der m_i ungeändert geblieben ist. Demnach sind die Componenten dieser beiden Wirkungen zusammengenommen wieder:

$$\mathfrak{X} d\omega', \qquad \mathfrak{Y} d\omega', \qquad \mathfrak{Z} d\omega'.$$

Die Componenten der dritten Wirkung endlich sind:

$$P_1' d\omega', \qquad P_2' d\omega', \qquad P_3' d\omega',$$

wenn nämlich P_1', P_2', P_3' auf $d\omega'$ bezogen gedacht werden. Somit ergeben sich hier folgende Relationen:

$$\mathfrak{X}d\omega' + P_1'd\omega' = 0, \quad \text{etc.},$$

welche, mit den vorhin erhaltenen Relationen zusammengestellt, augenblicklich die Formeln geben:

$$Xd\omega' = P_1'd\omega', \qquad Yd\omega' = P_2'd\omega', \qquad Zd\omega' = P_3'd\omega'.$$

Hierdurch sind die Componenten X, Y, Z der innern Druck-Kraft bestimmt: und zwar zeigt sich, dafs man die Componenten des auf irgend ein Element $d\omega'$ ausgeübten inneren Druckes erhält, wenn man die in (22.) aufgestellten Ausdrücke P_1, P_2, P_3 in Bezug auf dieses Element $d\omega'$ bildet; dafs mithin für die äufsern und innern Druck-Kräfte genau dieselben Formeln gelten.

§. 7.

Vollständige Berechnung der Kräfte Q und P.

Aus (22.) und (23.) ergeben sich bei weiterer Ausrechnung für die Kräfte Q, P folgende Ausdrücke:

$$(26.)\quad \begin{cases} Q_1 = (K+3k)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + (K+k)\left(\dfrac{\partial(u_2-v_1)}{\partial y} + \dfrac{\partial(u_3-w_1)}{\partial z}\right), \\ Q_2 = (K+3k)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + (K+k)\left(\dfrac{\partial(v_3-w_2)}{\partial z} + \dfrac{\partial(v_1-u_2)}{\partial x}\right), \\ Q_3 = (K+3k)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + (K+k)\left(\dfrac{\partial(w_1-u_3)}{\partial x} + \dfrac{\partial(w_2-v_3)}{\partial y}\right), \\ P_1d\omega = q(K+k)\{(2u_1+\Theta)\cos(\nu,x) + (u_2+v_1)\cos(\nu,y) + (u_3+w_1)\cos(\nu,z)\}d\omega, \\ P_2d\omega = q(K+k)\{(v_1+u_2)\cos(\nu,x) + (2v_2+\bar{\Theta})\cos(\nu,y) + (v_3+w_2)\cos(\nu,z)\}d\omega, \\ P_3d\omega = q(K+k)\{(w_1+u_3)\cos(\nu,x) + (w_2+v_3)\cos(\nu,y) + (2w+\bar{\Theta})\cos(\nu,z)\}d\omega, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{(k-K)\Theta+K}{K+k} = \bar{\Theta}$$

gesetzt ist *). Da für den besondern Fall, dafs die Functionen u, v, w Null sind, die neue Lage des Systems mit seiner ursprünglichen Lage zusammenfällt, so ergiebt sich aus den vorstehenden Formeln (26.), dafs

*) Vergl. *Poisson*, Journal de l'Ec. Polyt. T. 13, Cah. 20, p. 52. Die dort von *Poisson* abgeleiteten Formeln sind mit den in (26.) aufgestellten identisch, wenn $qK = K_p$ und $qk = k_p$ gesetzt wird, wo K_p und k_p die von *Poisson* gebrauchten Constanten vorstellen.

$$(27.)\qquad \begin{cases} Q_1 = 0, \\ Q_2 = 0, \\ Q_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1\,d\omega = qK\cos(\nu, x)\,d\omega, \\ P_2\,d\omega = qK\cos(\nu, y)\,d\omega, \\ P_3\,d\omega = qK\cos(\nu, z)\,d\omega \end{cases}$$

die äufsern Kräfte sind, deren es bedarf, um das System während seiner primitiven Lage im Gleichgewicht zu halten. Hieraus ergiebt sich die Bedeutung der Constanten K.

Ferner ist noch zu bemerken, dafs, wenn die natürliche Gleichgewichtslage des Systems zur primitiven Lage genommen wird, die Constante K, wie sich aus (27.) ergiebt, Null ist, dafs demnach für diesen Fall der Ausdruck Φ mit der Potential-Function F identisch wird.

Ich gehe nun über zur *Transformation* der erhaltenen Gleichungen.

Zweiter Abschnitt.

§. 8.

Ueber Variations-Coefficienten.

Um Wiederholungen und Unterbrechungen zu vermeiden, lasse ich folgende Bemerkungen vorausgehen.

Sind x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten, u, v, w Functionen von x, y, z; und ist ferner Ψ ein Ausdruck, welcher x, y, z, u, v, w und die ersten Ableitungen von u, v, w enthält; so bezeichne ich mit

$$(\Psi, u),\quad (\Psi, v),\quad (\Psi, w),\quad (\Psi, u)_\nu,\quad (\Psi, v)_\nu,\quad (\Psi, w)_\nu$$

die Variations-Coefficienten, welche sich ergeben, wenn man das über einen beliebigen Raum R ausgedehnte Integral

$$J = \iiint \Psi\,dx\,dy\,dz$$

in Bezug auf u, v, w variirt, definire nämlich die Bedeutung jener Gröfsen durch folgende Formel

$$(28^4.)\qquad \begin{aligned} \delta J = &-\iiint \{(\Psi, u)\delta u + (\Psi, v)\delta v + (\Psi, w)\delta w\}\,dx\,dy\,dz \\ &-\iint \{(\Psi, u)_\nu \delta u + (\Psi, v)_\nu \delta v + (\Psi, w)_\nu \delta w\}\,d\omega, \end{aligned}$$

in welcher das erste Integral über den Inhalt, das zweite über die Oberfläche des Raumes R ausgedehnt ist, $d\omega$ ein Element jener Oberfläche und ν die auf $d\omega$ nach Innen errichtete Normale vorstellt.

Dieser Definition zufolge haben, wie sich leicht ergiebt, die Gröfsen (Ψ, u), $(\Psi, u)_\nu$, etc. folgende Werthe:

$$(28^{B}.)\begin{cases}(\Psi,u)=-\dfrac{\partial\Psi}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}},\quad(\Psi,v)=\text{etc.}\\ (\Psi,u)_{\nu}=\dfrac{\partial\Psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}\cos(\nu,x)+\dfrac{\partial\Psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}\cos(\nu,y)+\dfrac{\partial\Psi}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\cos(\nu,z),\quad(\Psi,v)_{\nu}=\text{etc.}\end{cases}$$

Sind Ψ_1, Ψ_2 Ausdrücke derselben Art wie Ψ, und sind A_0, A, A_1, A_2, ... Constante, so ist:

$$(28^{C}.)\begin{cases}((A_0+A\Psi+A_1\Psi_1+A_2\Psi_2+\cdots),u)=A(\Psi,u)+A_1(\Psi_1,u)+A_2(\Psi_2,u)+\cdots\\ ((A_0+A\Psi+A_1\Psi_1+A_2\Psi_2+\cdots),u)_{\nu}=A(\Psi,u)_{\nu}+A_1(\Psi_1,u)_{\nu}+A_2(\Psi_2,u)_{\nu}+\cdots\end{cases}$$

Ferner gilt, wie sogleich erläutert werden soll, folgender Satz:

Sind u, v, w sowohl als auch U, V, W Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; sind ferner diese sechs Functionen mit einander verbunden durch drei Relationen:

$$\varphi_1=0,\qquad\varphi_2=0,\qquad\varphi_3=0,$$

in welchen aufser den Functionen selbst auch die unabhängigen Variabeln x, y, z vorkommen können, in welchen die Ableitungen der Functionen aber *nicht* enthalten sind; und kann man folglich auf Grund dieser Relationen einen, von u, v, w, von den ersten Ableitungen der u, v, w, sowie von x, y, z abhängigen, Ausdruck Ψ andererseits auch als einen von U, V, W, von den ersten Ableitungen der U, V, W, sowie von x, y, z abhängigen Ausdruck betrachten: so stehen die einerseits nach u, v, w und die andererseits nach U, V, W gebildeten Variations-Coefficienten dieses Ausdrucks in folgender Beziehung zu einander:

$$(28^{D}.)\begin{cases}(\Psi,u)=(\Psi,U)\dfrac{\partial U}{\partial u}+(\Psi,V)\dfrac{\partial V}{\partial u}+(\Psi,W)\dfrac{\partial W}{\partial u},\\ (\Psi,u)_{\nu}=(\Psi,U)_{\nu}\dfrac{\partial U}{\partial u}+(\Psi,V)_{\nu}\dfrac{\partial V}{\partial u}+(\Psi,W)_{\nu}\dfrac{\partial W}{\partial u},\\ (\Psi,U)=(\Psi,u)\dfrac{\partial u}{\partial U}+(\Psi,v)\dfrac{\partial v}{\partial U}+(\Psi,w)\dfrac{\partial w}{\partial U},\\ (\Psi,U)_{\nu}=(\Psi,u)_{\nu}\dfrac{\partial u}{\partial U}+(\Psi,v)_{\nu}\dfrac{\partial v}{\partial U}+(\Psi,w)_{\nu}\dfrac{\partial w}{\partial U},\end{cases}$$

wo sich die Differential-Coefficienten $\frac{\partial U}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial u}$, ... auf die durch die Gleichungen $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$ zwischen den u, v, w und den U, V, W festgestellte Abhängigkeit beziehen.

Man gelangt zu den beiden ersten in (28^D.) aufgestellten Formeln augenblicklich, wenn man beachtet, dafs die beiden Werthe, welche sich für die Variation

$$\delta\iiint \Psi\, dx\, dy\, dz$$

dadurch ergeben, dafs man Ψ einmal als abhängig von u, v, w, und sodann zweitens als abhängig von U, V, W ansieht, nämlich die beiden Werthe:

$$-\iiint \{(\Psi, u)\,\delta u + \cdots\}\, dx\, dy\, dz - \iint \{(\Psi, u)_\nu \delta u + \cdots\}\, d\omega$$

und

$$-\iiint \{(\Psi, U)\,\delta U + \cdots\}\, dx\, dy\, dz - \iint \{(\Psi, U)_\nu \delta U + \cdots\}\, d\omega$$

unter einander in Bezug auf δu, δv, δw identisch sein müssen, sobald die Incremente δU, δV, δW vermittelst der Relationen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ durch δu, δv, δw ausgedrückt sind; dafs mithin die Gleichungen:

$$(\Psi, u)\,\delta u + (\Psi, v)\,\delta v + (\Psi, w)\,\delta w = (\Psi, U)\,\delta U + (\Psi, V)\,\delta V + (\Psi, W)\,\delta W,$$

$$(\Psi, u)_\nu \delta u + (\Psi, v)_\nu \delta v + (\Psi, w)_\nu \delta w = (\Psi, U)_\nu \delta U + (\Psi, V)_\nu \delta V + (\Psi, W)_\nu \delta W$$

in Bezug auf δu, δv, δw identisch stattfinden müssen, sobald darin für δU, δV, δW die Werthe:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial u}\delta u + \frac{\partial U}{\partial v}\delta v + \frac{\partial U}{\partial w}\delta w,$$

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial u}\delta u + \frac{\partial V}{\partial v}\delta v + \frac{\partial V}{\partial w}\delta w,$$

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u}\delta u + \frac{\partial W}{\partial v}\delta v + \frac{\partial W}{\partial w}\delta w$$

substituirt werden. Die beiden andern Gleichungen in (28^D.) ergeben sich auf ähnliche Weise.

Aus diesem Satze ergiebt sich unmittelbar, dafs, wenn die Variations-Coefficienten

$$(\Psi, u), \quad (\Psi, v), \quad (\Psi, w)$$

identisch Null sind, dasselbe auch von den Variations-Coefficienten

(28^E.) $\quad (\Psi, U), \quad (\Psi, V), \quad (\Psi, W)$

gelten mufs.

§. 9.

Formeln für ein beliebiges dreifaches Flächen-System.

Da es sich darum handelt in den für die Kräfte Q, P gefundenen Werthen an Stelle der Coordinaten x, y, z die Parameter ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 eines

beliebigen dreifachen Flächen-Systems

$$f_1(x, y, z) = \varrho_1, \quad f_2(x, y, z) = \varrho_2, \quad f_3(x, y, z) = \varrho_3$$

einzuführen, so erscheint es zweckmäfsig, zuerst unter den für ein solches System geltenden Formeln die wenigen zusammenzustellen, von denen hier Gebrauch gemacht werden soll.

Bezeichnet man die von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 nach x, y, z genommene Determinante mit $\triangle$ und die von x, y, z nach ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 genommene mit $\triangledown$

$$(29^{\alpha}.) \qquad \begin{pmatrix} \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \\ x, y, z \end{pmatrix} = \triangle, \quad \begin{pmatrix} x, y, z \\ \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \end{pmatrix} = \triangledown,$$

so ist:

$$(29^{\beta}.) \qquad \triangle . \triangledown = 1.$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$d\varrho_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} dz, \quad d\varrho_2 = \text{etc.}$$

durch Auflösung nach dx, dy, dz:

$$\triangle dx = \frac{\partial \triangle}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} d\varrho_1 + \frac{\partial \triangle}{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}} d\varrho_2 + \frac{\partial \triangle}{\partial \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}} d\varrho_3, \quad \triangle dy = \text{etc.},$$

folglich:

$$(29^{\gamma}.) \qquad \frac{\partial x}{\partial \varrho_\varkappa} = \frac{1}{\triangle} \frac{\partial \triangle}{\partial \frac{\partial \varrho_\varkappa}{\partial x}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varrho_\varkappa} = \frac{1}{\triangle} \frac{\partial \triangle}{\partial \frac{\partial \varrho_\varkappa}{\partial y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varrho_x} = \frac{1}{\triangle} \frac{\partial \triangle}{\partial \frac{\partial \varrho_\varkappa}{\partial z}}.$$

Mit a, b, c sollen folgende (respective den Parametern ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 conjugirte) Gröfsen bezeichnet werden:

$$(29^{\delta}.) \qquad \begin{cases} a^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right)^2, \\ b^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\right)^2, \\ c^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\right)^2. \end{cases}$$

Ist ferner M irgend ein Punkt des Raumes mit den Coordinaten x, y, z und mit den Parametern ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, so sollen mit τ_1, τ_2, τ_3 die durch M gelegten Tangenten der drei Curven bezeichnet werden, in welchen sich die durch M gehenden Flächen des Systems schneiden; folglich mit $\tau_\varkappa$ die Richtung bezeichnet werden, in welcher der Punkt M fortrücken würde, wenn man seinen Parameter $\varrho_\varkappa$ um $d\varrho_\varkappa$ anwachsen, seine beiden andern Parameter

aber ungeändert liefse. Hiernach ist:

$$(29^{\varepsilon}.) \qquad \cos(\tau_\varkappa, x) : \cos(\tau_\varkappa, y) : \cos(\tau_\varkappa, z) = \frac{\partial x}{\partial \varrho_\varkappa} : \frac{\partial y}{\partial \varrho_\varkappa} : \frac{\partial z}{\partial \varrho_\varkappa}.$$

Uebrigens soll:

$$(29^{\zeta}.) \qquad \cos(\tau_\varkappa, x) = \alpha_\varkappa, \quad \cos(\tau_\varkappa, y) = \beta_\varkappa, \quad \cos(\tau_\varkappa, z) = \gamma_\varkappa$$

gesetzt werden. Dadurch ergeben sich mit Bezug auf $(29^{\delta}.)$ folgende Formeln:

$$(29^{\eta}.) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{a}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}, & \alpha_2 = \frac{1}{b}\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}, & \alpha_3 = \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}, \\ \beta_1 = \frac{1}{a}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}, & \beta_2 = \frac{1}{b}\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}, & \beta_3 = \frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}, & \gamma_3 = \frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}, & \gamma_3 = \frac{1}{c}\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}. \end{cases}$$

Für ein *orthogonales* Flächen-System ist die Determinante der 9 Cosinus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \gamma_3$ gleich Eins, und daher den vorstehenden Formeln zufolge:

$$(29^{\vartheta}.) \qquad \nabla = abc.$$

Ferner ist alsdann

$$(29^{\iota}.) \qquad \frac{\partial x}{\partial \varrho_k}\frac{\partial x}{\partial \varrho_i} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_k}\frac{\partial y}{\partial \varrho_i} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_k}\frac{\partial z}{\partial \varrho_i} = 0,$$

sobald k und i verschieden sind.

§. 10.

Das Problem der Transformation.

Es handelt sich darum, in den Werthen der Kräfte Q, P nicht allein an Stelle von x, y, z die Parameter ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 irgend eines gegebenen dreifachen Flächen-Systems einzuführen, sondern gleichzeitig auch die Functionen u, v, w durch andere Functionen U, V, W zu ersetzen.

Bezeichnet nämlich M den primitiven Ort eines Molecüls m; ferner E die Excursion, welche dieses Molecül m, beim Uebergange aus seiner ursprünglichen in seine neue Lage, gemacht hat; und sind endlich τ_1, τ_2, τ_3 die von M ausgehenden im vorhergehenden Paragraphen definirten Richtungen; so sollen die nach den Achsen x, y, z genommenen Componenten u, v, w der Excursion E gegenwärtig ersetzt werden durch die nach τ_1, τ_2, τ_3 genommenen Componenten U, V, W dieser Excursion. Es sind demnach U, V, W die respective mit τ_1, τ_2, τ_3 parallel laufenden Kanten eines schiefwinkligen Parallelepipedums, welches die Excursion E zur Haupt-Diagonale

hat; folglich nach (29$^{\zeta}$.) mit u, v, w durch die Relationen

$$(29^{\varkappa}.)\quad \begin{cases} u = \alpha_1 U + \alpha_2 V + \alpha_3 W, \\ v = \beta_1 U + \beta_2 V + \beta_3 W, \\ w = \gamma_1 U + \gamma_2 V + \gamma_3 W \end{cases}$$

verbunden.

Die Operationen, durch welche ich zu der in Rede stehenden Transformation gelange, zerfallen in drei Abschnitte. ***Zuerst*** transformire ich die in (22.) für die Kräfte Q, P aufgestellten Werthe unter der Voraussetzung, dafs die Transformation des in diesen Werthen enthaltenen Ausdrucks Φ bereits ausgeführt ist. Hierbei bleibt die Untersuchung vollständig allgemein, nämlich das Flächen-System ganz beliebig, orthogonal oder anorthogonal. ***Sodann*** führe ich die Transformation von Φ aus, beschränke mich dabei aber auf den Fall eines orthogonalen Flächen-Systems. ***Endlich*** substituire ich den für Φ erhaltenen Werth in die zuvor transformirten Formeln der Kräfte Q und P.

§. 11.

Transformation der Gleichungen, welche die Kräfte Q und P von der Function Φ abhängig machen.

Der in jenen Formeln (22.) enthaltene Ausdruck Φ ist aus den ersten Ableitungen der Functionen u, v, w zusammengesetzt, und kann daher zufolge der Relationen (29$^{\varkappa}$.) andererseits auch als abhängig von U, V, W und den ersten Ableitungen der U, V, W angesehen werden. Mit Rücksicht hierauf läfst sich die Variation des über einen beliebigen Raum R ausgedehnten Integrales

$$(30.)\quad J = \iiint \Phi\, dx\, dy\, dz$$

in doppelter Weise bewerkstelligen; nämlich entweder der Formel:

$$(30^{\alpha}.)\quad \delta J = -\iiint \{(\Phi,u)\,\delta u + \cdots\}\, dx\, dy\, dz - \iint \{(\Phi,u)_{\nu}\,\delta u + \cdots\}\, d\omega$$

oder der Formel:

$$(30^{\beta}.)\quad \delta J = -\iiint \{(\Phi,U)\,\delta U + \cdots\}\, dx\, dy\, dz - \iint \{(\Phi,U)_{\nu}\,\delta U + \cdots\}\, d\omega$$

entsprechend. Wendet man auf die sich hier ergebenden Variations-Coefficienten den in (28^{D}.) aufgestellten Satz an, so erhält man:

$$(\Phi, U) = (\Phi, u)\frac{\partial u}{\partial U} + (\Phi, v)\frac{\partial v}{\partial U} + (\Phi, w)\frac{\partial w}{\partial U}$$

oder mit Hülfe der zwischen u, v, w, U, V, W bestehenden Relationen ($29^{\varkappa}$.):

$$(\Phi, U) = (\Phi, u)\alpha_1 + (\Phi, v)\beta_1 + (\Phi, w)\gamma_1.$$

Auf diese Weise ergeben sich leicht folgende sechs Formeln:

$$(31.)\quad \begin{cases} (\Phi, U) = \alpha_1(\Phi, u) + \beta_1(\Phi, v) + \gamma_1(\Phi, w), \\ (\Phi, V) = \alpha_2(\Phi, u) + \beta_2(\Phi, v) + \gamma_2(\Phi, w), \\ (\Phi, W) = \alpha_3(\Phi, u) + \beta_3(\Phi, v) + \gamma_3(\Phi, w), \\ (\Phi, U)_\nu = \alpha_1(\Phi, u)_\nu + \beta_1(\Phi, v)_\nu + \gamma_1(\Phi, w)_\nu, \\ (\Phi, V)_\nu = \alpha_2(\Phi, u)_\nu + \beta_2(\Phi, v)_\nu + \gamma_2(\Phi, w)_\nu, \\ (\Phi, W)_\nu = \alpha_3(\Phi, u)_\nu + \beta_3(\Phi, v)_\nu + \gamma_3(\Phi, w)_\nu. \end{cases}$$

Beachtet man nun, dafs in Φ die Functionen u, v, w selbst nicht, sondern nur ihre Ableitungen enthalten sind, und dafs daher die Variations-Coefficienten (Φ, u), $(\Phi, u)_\nu$, etc. nach (28^{B}.) folgende Werthe besitzen:

$$(\Phi, u) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial u_3}, \qquad (\Phi, v) = \text{etc.}$$

$$(\Phi, u)_\nu = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\cos(\nu, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\cos(\nu, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3}\cos(\nu, z), \quad (\Phi, v)_\nu = \text{etc.}$$

so ergiebt sich, dafs die für die Kräfte Q, P aufgestellten Formeln (22.) identisch sind mit folgenden:

$$(32.)\quad \begin{cases} Q\cos(Q, x) = (\Phi, u), \\ Q\cos(Q, y) = (\Phi, v), \\ Q\cos(Q, z) = (\Phi, w), \end{cases} \qquad \begin{cases} P\cos(P, x) = q.(\Phi, u)_\nu, \\ P\cos(P, y) = q.(\Phi, v)_\nu, \\ P\cos(P, z) = q.(\Phi, w)_\nu, \end{cases}$$

wo aufserdem $Q_1 = Q\cos(Q, x)$, etc. gesetzt ist. Mit Hülfe der ersten in (31.) aufgestellten Relation ergiebt sich hieraus unmittelbar:

$$(\Phi, U) = Q(\alpha_1\cos(Q, x) + \beta_1\cos(Q, y) + \gamma_1\cos(Q, z))$$

oder nach (29^{ζ}.)

$$(\Phi, U) = Q\cos(Q, \tau_1).$$

In solcher Weise verwandeln sich die Formeln (32.) durch Benutzung der Relationen (31.) in folgende:

$$(33.)\quad \begin{cases} Q\cos(Q, \tau_1) = (\Phi, U), \\ Q\cos(Q, \tau_2) = (\Phi, V), \\ Q\cos(Q, \tau_3) = (\Phi, W), \end{cases} \qquad \begin{cases} P\cos(P, \tau_1) = q.(\Phi, U)_\nu, \\ P\cos(P, \tau_2) = q.(\Phi, V)_\nu, \\ P\cos(P, \tau_3) = q.(\Phi, W)_\nu. \end{cases}$$

Es müssen nun (Φ, U), $(\Phi, U)_\nu$, etc. berechnet werden. Die Bestimmung dieser, durch die Formel

$$(34.) \quad \delta\iiint \Phi\, dx\, dy\, dz$$
$$= -\iiint\{(\Phi, U)\delta U + \cdots\}\, dx\, dy\, dz - \iint\{(\Phi, U)_\nu \delta U + \cdots\}\, d\omega$$

definirten, Coefficienten würde augenblicklich nach (28^B.) erfolgen können, wenn man U, V, W als Functionen von x, y, z betrachten wollte, macht aber einige Mühe, sobald man, was hier geschehen mufs, U, V, W als Functionen von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 betrachtet, und demnach in Φ nicht die Ableitungen von U, V, W nach x, y, z, sondern die nach ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 enthalten denkt. Zunächst ist mit Bezug auf (29^α.)

$$J = \iiint \Phi\, dx\, dy\, dz = \iiint \Phi \nabla\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3$$

und demzufolge, wenn man die Variation δJ in $\delta J = \delta_U J + \delta_V J + \delta_W J$ trennt, und der Kürze wegen (wie fortan durchgängig geschehen soll) $\frac{\partial U}{\partial \varrho_k} = U_k$, $\frac{\partial V}{\partial \varrho_k} = V_k$, $\frac{\partial W}{\partial \varrho_k} = W_k$ setzt:

$$\delta_U J = \iiint\left\{\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U}\delta U + \frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_3}\delta U_3\right\} d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3$$

oder:

$$(34^\alpha.) \quad \delta_U J$$
$$= -\iiint\left\{-\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_1} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_3}\right\}\delta U\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3$$
$$+\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_1}\delta U\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_2}\delta U\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \Phi\nabla}{\partial U_3}\delta U\right)\right\} d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3.$$

Ich werde nun zeigen, wie von diesen beiden Integralen, welche den Werth von $\delta_U J$ darstellen, und über einen beliebig gewählten Raum R ausgedehnt sind, das zweite in ein über die ***Oberfläche*** dieses Raumes ausgedehntes Integral verwandelt werden kann; und werde zu diesem Zweck das Integral

$$i = \iiint \frac{\partial f}{\partial \varrho_1}\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3$$

näher untersuchen, dasselbe gleichfalls ausgedehnt gedacht über einen beliebigen Raum R, und darin f als irgend eine Function von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 oder von x, y, z betrachtet. Dieses Integral i verwandelt sich durch (29^α.) in:

$$i = \iiint\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right)\Delta\, dx\, dy\, dz,$$

sodann mit Hülfe von (29$^{\gamma}$.) in:

$$i = \iiint \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}} \right) dx\, dy\, dz$$

oder in:

$$i = \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}} \right) - f\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}} \right) \right\} dx\, dy\, dz.$$

Nach einem bekannten Satze über Functional-Determinanten ist der letzte Term (nämlich der in f multiplicirte Term) des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks identisch Null. Läfst man diesen Term fort, so ergiebt sich leicht:

$$i = -\iint f \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} \cos(\nu, x) + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}} \cos(\nu, y) + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}} \cos(\nu, z) \right) d\omega,$$

wo $d\omega$ ein Element der Oberfläche des Raumes R ist, ν die nach Innen errichtete Normale vorstellt, und die Integration über die ganze Oberfläche auszudehnen ist. Sodann ergiebt sich weiter mit Hülfe der Formeln (29$^{\gamma}$.) und (29$^{\eta}$.)

$$i = -\iint f \Delta (a\alpha_1 \cos(\nu, x) + a\beta_1 \cos(\nu, y) + a\gamma_1 \cos(\nu, z))\, d\omega,$$

ferner mit Hülfe von (29$^{\beta}$.) und (29$^{\zeta}$.)

$$i = -\iint \frac{fa}{\nabla} \cos(\nu, \tau_1)\, d\omega.$$

Man erhält also schliefslich die erste Formel folgenden Systems:

$$(35.) \quad \begin{cases} \iiint \frac{\partial f}{\partial \varrho_1} d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3 = -\iint \frac{fa}{\nabla} \cos(\nu, \tau_1)\, d\omega, \\ \iiint \frac{\partial f}{\partial \varrho_2} d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3 = -\iint \frac{fb}{\nabla} \cos(\nu, \tau_2)\, d\omega, \\ \iiint \frac{\partial f}{\partial \varrho_3} d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3 = -\iint \frac{fc}{\nabla} \cos(\nu, \tau_3)\, d\omega, \end{cases}$$

in welchem die beiden letzten Formeln in analoger Weise abzuleiten sind. Durch Anwendung dieser Formeln verwandelt sich nun der, in (34$^{\alpha}$.) für

$\delta_U \boldsymbol{J}$ gefundene, Werth in:

$$\delta_U \boldsymbol{J} = -\iiint \left\{ -\frac{\partial \Phi \nabla}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \Phi \nabla}{\partial U_1} + \cdots \right\} \frac{\delta U}{\nabla} dx\, dy\, dz$$
$$-\iint \left\{ \frac{\partial \Phi \nabla}{\partial U_1} \frac{a}{\nabla} \cos(\nu, \tau_1) + \cdots \right\} \delta U\, d\omega.$$

Somit ergeben sich für die Variations-Coefficienten $(\Phi, \boldsymbol{U})$ und $(\Phi, \boldsymbol{U})_\nu$ folgende Werthe:

$$(36.) \quad \begin{cases} (\Phi, \boldsymbol{U}) = \left\{ -\frac{\partial \Phi \nabla}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{\partial \Phi \nabla}{\partial U_1} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{\partial \Phi \nabla}{\partial U_2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_3} \frac{\partial \Phi \nabla}{\partial U_3} \right\} \frac{1}{\nabla}, \\ (\Phi, \boldsymbol{U})_\nu = \frac{\partial \Phi}{\partial U_1} a \cos(\nu, \tau_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial U_2} b \cos(\nu, \tau_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial U_3} c \cos(\nu, \tau_3) \end{cases}$$

und ähnliche Werthe für $(\Phi, \boldsymbol{V})$, $(\Phi, \boldsymbol{W})$, $(\Phi, \boldsymbol{V})_\nu$, $(\Phi, \boldsymbol{W})_\nu$.

Denkt man sich diese Werthe der Variations-Coefficienten in die Formeln (33.) substituirt, so fehlt zur vollständigen Transformation jener Formeln nur noch die Umformung des Ausdruckes Φ selbst.

§. 12.

Transformation des Ausdruckes Φ.

Wie bereits erwähnt, schränke ich meine Untersuchung von jetzt an auf den Fall ein, dafs die Flächen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 orthogonal sind.

Zunächst werde ich mich mit der Transformation der Potential-Function $\boldsymbol{F}$ beschäftigen, und hierdurch auf leichte Weise in den Besitz von Formeln gelangen, welche zur Transformation von Φ erforderlich sind, und zu deren Ableitung es sonst einer mühsamen Rechnung bedurft hätte.

Es seien $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}'$ die primitiven Orte zweier, einander nahen, Molecüle m, m'; ferner $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}'$ die Excursionen, welche diese Molecüle beim Uebergange aus ihrer ursprünglichen in ihre neue Lage gemacht haben. Die Coordinaten von $\boldsymbol{M}$ seien x, y, z und $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ die von $\boldsymbol{M}'$. Dem entsprechend mag die Charakteristik Δ überhaupt zur Bezeichnung des Zuwachses benutzt werden, welchen eine von x, y, z abhängige Gröfse beim Uebergange vom Punkte $\boldsymbol{M}$ zum Punkte $\boldsymbol{M}'$ erhält. Da z. B. u, v, w die Componenten der Excursion $\boldsymbol{E}$ sind, so werden die Componenten von $\boldsymbol{E}'$ mit $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$ zu bezeichnen sein.

Für das Potential $2m\boldsymbol{F}$ der Gesammtwirkung, welche m von allen übrigen Molecülen empfängt, ist im §. 1 folgender Ausdruck gefunden:

$$2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{H} + 2\boldsymbol{K}\Theta + (\boldsymbol{K}+3k)\Theta^2 + (\boldsymbol{K}+k)\boldsymbol{T} + (2\boldsymbol{K}+4k)\Lambda,$$

wo Θ, T, Δ in der dort angegebenen Weise aus den 9 Gröfsen u_1, u_2, ... w_3 (das ist aus den Werthen der Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ... $\frac{\partial w}{\partial z}$ für den Punkt M) zusammengesetzt sind. Es konnte, da die primitive Anordnung der Molecüle isotrop ist, bei der, dort gegebenen, Entwicklung dieser Formel ein ganz beliebiges rechtwinkliges Coordinaten-System (x, y, z) zu Grunde gelegt werden. Man würde daher zu einer vollständig analogen Formel für F gelangt sein, wenn man von irgend einem andern rechtwinkligen Coordinaten-Systeme ausgegangen wäre. In der That, nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinaten-System (X, Y, Z), dessen Anfangspunkt, um die Vorstellung zu erleichtern, mit dem des Systemes (x, y, z) zusammenfallen mag, und dessen Achsen vorläufig beliebig gewählte Richtungen haben sollen; bezeichnen wir die Coordinaten von M in diesem System mit X, Y, Z, sodann die Componenten von E nach den Achsen des Systems mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$; und denken wir uns endlich diese $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ als Functionen von X, Y, Z, so können wir neben die für F so eben hingestellte Formel folgende andere setzen:

$$2F = H + 2K\Theta' + (K + 3k)\Theta'^2 + (K + k)T' + (2K + 4k)\Delta',$$

wo die Gröfsen Θ', T', Δ' aus den 9 Gröfsen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$ in ganz derselben Weise zusammengesetzt sind, wie die in jener Formel enthaltenen Θ, T, Δ aus u_1, u_2, ... w_3; wenn nämlich $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$ die Werthe der Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial X}$, $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial Y}$, ... $\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial Z}$ für den Punkt M vorstellen. Wir kommen auf diese Weise zu dem Resultat, dafs diese beiden für F gefundenen Ausdrücke einander *gleich* sind; ein Resultat, welches sich noch vervollständigen läfst durch folgende Bemerkungen.

Erstens. Die Gleichsetzung der beiden Werthe von F mag ausgeführt und die so erhaltene Gleichung mit $A = 0$ bezeichnet werden. Die in dieser Gleichung $A = 0$ vorkommenden Coefficienten K, k sind von einer Function φ abhängig, über deren Beschaffenheit keine bestimmte Voraussetzung zu Grunde gelegt ist, nämlich abhängig von derjenigen Function φ, welche das Potential zweier einzelnen Molecüle auf einander darstellt. Daraus folgt, dafs die Gleichung $A = 0$ auch dann noch stattfinden mufs, wenn man die Function φ ändert; oder (was dasselbe ist) auch dann noch gelten mufs, wenn man die Werthe der Coefficienten K, k ändert; dafs mithin von den beiden, im linken Theile A dieser Gleichung enthaltenen, respective in K und in k multiplicirten Ausdrücken jeder für sich Null sein mufs. Hierdurch er-

geben sich die beiden Formeln:

$$(37.)\quad \begin{cases} 2\Theta+\Theta^2+T+2\Delta = 2\Theta'+\Theta'^2+T'+2\Delta', \\ 3\Theta^2+T+4\Delta = 3\Theta'^2+T'+4\Delta'. \end{cases}$$

Zweitens. Noch in anderer Weise kann die Gleichung $A=0$ in zwei Formeln zerfällt werden. Es mufs nämlich jene Gleichung auch noch dann in Geltung bleiben, wenn man in ihr die Functionen u, v, w, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ variirt, sobald man nur diese Variation in der Art bewerkstelligt, dafs die durch u, v, w einerseits und die durch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ andererseits repräsentirten Molecular-Excursionen E, E', ... unter einander identisch bleiben. Diese Anforderung wird nun, wie auf der Stelle klar ist, erfüllt, wenn man die Functionen u, v, w, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ in αu, αv, αw, $\alpha\mathfrak{U}$, $\alpha\mathfrak{V}$, $\alpha\mathfrak{W}$ übergehen läfst, und dabei unter α eine beliebige Constante versteht. Hierdurch aber verwandelt sich der linke Theil der Gleichung $A=0$ in ein Aggregat zweier Ausdrücke, von denen der eine in α, der andere in α^2 multiplicirt ist, wie sich solches augenblicklich ergiebt, wenn man beachtet, dafs durch die in Rede stehende Modification Θ, T, Δ in $\alpha\Theta$, $\alpha^2 T$, $\alpha^2\Delta$ und Θ', T', Δ' in $\alpha\Theta'$, $\alpha^2 T'$, $\alpha^2\Delta'$ übergehen. Da nun α beliebig ist, so mufs von jenen zuvor erwähnten in α und in α^2 multiplicirten Ausdrücken jeder für sich Null sein. Und hierdurch ergiebt sich folgende Formel:

$$(38.)\qquad \Theta = \Theta'$$

nebst einer andern, welche nichts Neues bietet, nämlich eine Folge der Formeln (37.) ist.

Aus (37.) und (38.) folgt nun sogleich:

$$\Theta=\Theta', \qquad T=T' \qquad \Delta=\Delta'.$$

Wir können daher in dem Ausdruck Φ (23.)

$$(39.)\qquad \Phi = H+2K\Theta+(K+3k)\Theta^2+(K+k)T+(4K+4k)\Delta$$

für jede der drei Gröfsen Θ, T, Δ *zwei* Werthe angeben, nämlich:

$$(40.)\quad \begin{cases} \Theta = u_1+v_2+w_3 = \mathfrak{U}_1+\mathfrak{V}_2+\mathfrak{W}_3, \\ T = (v_3-w_2)^2+(w_1-u_3)^2+(u_2-v_1)^2 \\ \quad = (\mathfrak{V}_3-\mathfrak{W}_2)^2+(\mathfrak{W}_1-\mathfrak{U}_3)^2+(\mathfrak{U}_2-\mathfrak{V}_1)^2, \\ \Delta = (v_3w_2-v_2w_3)+(w_1u_3-w_3u_1)+(u_2v_1-u_1v_2) \\ \quad = (\mathfrak{V}_3\mathfrak{W}_2-\mathfrak{V}_2\mathfrak{W}_3)+(\mathfrak{W}_1\mathfrak{U}_3-\mathfrak{W}_3\mathfrak{U}_1)+(\mathfrak{U}_2\mathfrak{V}_1-\mathfrak{U}_1\mathfrak{V}_2). \end{cases}$$

Aufserdem mögen zur spätern Benutzung folgende Formeln aufbewahrt werden:

$$(41.)\quad \begin{cases} \Delta x = \overline{MM'}\cos(\overline{MM'}, x) \\ \Delta y = \text{etc.} \end{cases} \qquad (42.)\quad \begin{cases} \Delta X = \overline{MM'}\cos(\overline{MM'}, X) \\ \Delta Y = \text{etc.} \end{cases}$$

$$(43.)\quad \begin{cases} u + \Delta u = E'\cos(E', x) \\ v + \Delta v = \text{etc.} \end{cases} \qquad (44.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U} + \Delta\mathfrak{U} = E'\cos(E', X) \\ \mathfrak{V} + \Delta\mathfrak{V} = \text{etc.} \end{cases}$$

$$(45.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1\Delta X + \mathfrak{U}_2\Delta Y + \mathfrak{U}_3\Delta Z + \text{etc.}, \\ \Delta\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1\Delta X + \mathfrak{V}_2\Delta Y + \mathfrak{V}_3\Delta Z + \text{etc.}, \\ \Delta\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1\Delta X + \mathfrak{W}_2\Delta Y + \mathfrak{W}_3\Delta Z + \text{etc.}, \end{cases}$$

wo in den letzten Gleichungen diejenigen Terme fehlen, welche die zweiten und höheren Dimensionen von ΔX, ΔY, ΔZ enthalten.

Es handelt sich nun darum, in dem Ausdruck Φ (39.) an Stelle von x, y, z, u, v, w die in §. 9 und §. 10 definirten Gröfsen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, U, V, W einzuführen. Nach (29ˣ.), und mit Rücksicht darauf, dafs die Flächen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gegenwärtig orthogonal sein sollen, finden zwischen $u, v, w,$ und U, V, W folgende Relationen Statt:

$$(46.)\quad \begin{cases} u = \alpha_1 U + \alpha_2 V + \alpha_3 W, \\ v = \beta_1 U + \beta_2 V + \beta_3 W, \\ w = \gamma_1 U + \gamma_2 V + \gamma_3 W, \end{cases} \qquad (47.)\quad \begin{cases} U = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \\ V = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w, \\ W = \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w. \end{cases}$$

Die Parameter der Punkte M und M' sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ und $\varrho_1+\Delta\varrho_1$, $\varrho_2+\Delta\varrho_2$, $\varrho_3+\Delta\varrho_3$, ferner die von M ausgehenden (im §. 9 definirten) Tangenten τ_1, τ_2, τ_3.

Das Coordinaten-System (X, Y, Z) mag nun so gelegt sein, dafs seine Achsen X, Y, Z der Reihe nach mit den, von M ausgehenden, Richtungen τ_1, τ_2, τ_3 parallel laufen. Dadurch treten die Functionen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ der Argumente X, Y, Z in vollständig bestimmte Beziehung zu den einzuführenden Functionen U, V, W der Argumente ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. So findet z. B. zwischen den Werthen, welche diese beiderlei Functionen für den Punkt M besitzen, sogar vollständige Gleichheit statt; eine Gleichheit, welche allerdings augenblicklich aufhört, sobald man den Punkt M verläfst und zu irgend einem andern Punkte M' übergeht. Während nämlich $\mathfrak{U}+\Delta\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}+\Delta\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}+\Delta\mathfrak{W}$ die Zerlegung der Excursion E' nach X, Y, Z oder τ_1, τ_2, τ_3 repräsentiren, stellen $U+\Delta U$, $V+\Delta V$, $W+\Delta W$ die Zerlegung jener Excursion E' nach den von M' ausgehenden Tangenten τ_1', τ_2', τ_3' dar.

Ich werde nun die dem Punkte M' zugehörigen Gröfsen $\mathfrak{U}+\Delta\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}+\Delta\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}+\Delta\mathfrak{W}$ berechnen, indem ich dabei einerseits die Excursion E' durch die Functionen U, V, W, andererseits die Lage des Punktes M' durch seine relativen Coordinaten ΔX, ΔY, ΔZ gegeben betrachte; und dadurch für $\mathfrak{U}+\Delta\mathfrak{U}$ etc. oder vielmehr für $\Delta\mathfrak{U}$, $\Delta\mathfrak{V}$, $\Delta\mathfrak{W}$ zu Entwicklungen gelangen, welche den in (45.) aufgestellten analog sind, nämlich ebenso wie jene nach Potenzen von ΔX, ΔY, ΔZ fortschreiten, deren Coefficienten aber anderer Art sind, nämlich abhängig sind von den Functionen U, V, W. Da diese neue Entwicklung mit der in (45.) identisch sein mufs, so ergiebt sich dann durch Vergleichung der in der einen und in der andern enthaltenen, in Bezug auf ΔX, ΔY, ΔZ *linearen* Terme augenblicklich die Transformation der 9 Gröfsen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$. Mit dieser aber ist, wie die Formeln (39.) und (40.) zeigen, zugleich die Transformation von Φ selbst vollendet. Beachtet man, dafs es sich hier bei der neuen Entwicklung von $\Delta\mathfrak{U}$, $\Delta\mathfrak{V}$, $\Delta\mathfrak{W}$ nur um die Kenntnifs der in Bezug auf ΔX, ΔY, ΔZ *linearen* Terme handelt; so ist klar, dafs man bei Ausführung derselben die zweiten Dimensionen von ΔX, ΔY, ΔZ oder (was dasselbe ist) von Δx, Δy, Δz durchgängig fortlassen, d. h. die Charakteristik Δ wie die Differential-Charakteristik d behandeln kann. Mit Rücksicht hierauf läfst sich die in Rede stehende Rechnung folgendermafsen durchführen.

Aus (44.) folgt, weil $\mathfrak{U}$ und U für den Punkt M gleichen Werth haben:

$$U+\Delta\mathfrak{U} = E'\cos(E',\tau_1) = E'(\cos(E',x)\cos(\tau_1,x)+\cdots)$$

oder nach (43.) und (29^5.):

$$U+\Delta\mathfrak{U} = (u+\Delta u)\alpha_1+(v+\Delta v)\beta_1+(w+\Delta w)\gamma_1$$

oder nach (47.)

$$\Delta\mathfrak{U} = \alpha_1\Delta u+\beta_1\Delta v+\gamma_1\Delta w$$

oder mit nochmaliger Anwendung von (47.):

$$\Delta\mathfrak{U} = \Delta U-(u\Delta\alpha_1+v\Delta\beta_1+w\Delta\gamma_1)$$

oder, wenn man für u, v, w ihre Werthe aus (46.) substituirt, dabei die Relationen:

$$\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2=1, \qquad \alpha_k\Delta\alpha_k+\beta_k\Delta\beta_k+\gamma_k\Delta\gamma_k=0,$$
$$\alpha_k\alpha_i+\beta_k\beta_i+\gamma_k\gamma_i=0, \quad (\alpha_k\Delta\alpha_i+\beta_k\Delta\beta_i+\gamma_k\Delta\gamma_i)+(\alpha_i\Delta\alpha_k+\beta_i\Delta\beta_k+\gamma_i\Delta\gamma_k)=0$$

berücksichtigt, und der Kürze wegen

$$(47^{a}.)\qquad \begin{cases} \alpha_2 \Delta\alpha_3 + \beta_2 \Delta\beta_3 + \gamma_2 \Delta\gamma_3 = \Delta p_1, \\ \alpha_3 \Delta\alpha_1 + \beta_3 \Delta\beta_1 + \gamma_3 \Delta\gamma_1 = \Delta p_2, \\ \alpha_1 \Delta\alpha_2 + \beta_1 \Delta\beta_2 + \gamma_1 \Delta\gamma_2 = \Delta p_3 \end{cases}$$

setzt, die erste Gleichung des folgenden Systems:

$$(48.)\qquad \begin{cases} \Delta\mathfrak{U} = \Delta U + V\Delta p_3 - W\Delta p_2, \\ \Delta\mathfrak{V} = \Delta V + W\Delta p_1 - U\Delta p_3, \\ \Delta\mathfrak{W} = \Delta W + U\Delta p_2 - V\Delta p_1, \end{cases}$$

in welchem die beiden andern Gleichungen in analoger Weise erhalten werden. Um diese Formeln (48.) weiter zu entwickeln sind *erstens* für ΔU, ΔV, ΔW die Werthe:

$$(49.)\qquad \begin{cases} \Delta U = U_1 \Delta\varrho_1 + U_2 \Delta\varrho_2 + U_3 \Delta\varrho_3, \\ \Delta V = V_1 \Delta\varrho_1 + V_2 \Delta\varrho_2 + V_3 \Delta\varrho_3, \\ \Delta W = W_1 \Delta\varrho_1 + W_2 \Delta\varrho_2 + W_3 \Delta\varrho_3 \end{cases}$$

einzusetzen, wo U_1, U_2, ... W_3 (wie fortan stets) die Werthe der Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial\varrho_1}$, $\frac{\partial U}{\partial\varrho_2}$, ... $\frac{\partial W}{\partial\varrho_3}$ für den Punkt M repräsentiren. ***Zweitens*** sind zu diesem Zweck die Werthe von Δp_1, Δp_2, Δp_3 zu berechnen. Nach $(29^{\eta}.)$ ist:

$$\alpha_2 = \frac{1}{b}\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_2 \Delta\alpha_3 = \frac{1}{b}\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{c}\Delta\frac{\partial x}{\partial\varrho_3} + \frac{\partial x}{\partial\varrho_3}\Delta\frac{1}{c}\right)$$

und ebenso wird:

$$\beta_2 \Delta\beta_3 = \frac{1}{b}\frac{\partial y}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{c}\Delta\frac{\partial y}{\partial\varrho_3} + \frac{\partial y}{\partial\varrho_3}\Delta\frac{1}{c}\right),$$

$$\gamma_2 \Delta\gamma_3 = \frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{c}\Delta\frac{\partial z}{\partial\varrho_3} + \frac{\partial z}{\partial\varrho_3}\Delta\frac{1}{c}\right).$$

Die Addition dieser Gleichungen giebt mit Rücksicht auf $(29^{\iota}.)$ und $(47^{a}.)$:

$$\Delta p_1 = \frac{1}{bc}\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\Delta\frac{\partial x}{\partial\varrho_3} + \frac{\partial y}{\partial\varrho_2}\Delta\frac{\partial y}{\partial\varrho_3} + \frac{\partial z}{\partial\varrho_2}\Delta\frac{\partial z}{\partial\varrho_3}\right)$$

oder:

$$\Delta p_1 = \frac{1}{bc}\Sigma_k\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial\varrho_3\partial\varrho_k} + \frac{\partial y}{\partial\varrho_2}\frac{\partial^2 y}{\partial\varrho_3\partial\varrho_k} + \frac{\partial z}{\partial\varrho_2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho_3\partial\varrho_k}\right)\Delta\varrho_k,$$

wo für k der Reihe nach 1, 2, 3 zu setzen ist; oder:

$$(50.)\qquad \Delta p_1 = \frac{1}{bc}\Sigma_k (2,3k)\Delta\varrho_k = \frac{1}{bc}((2,31)\Delta\varrho_1 + (2,32)\Delta\varrho_2 + (2,33)\Delta\varrho_3).$$

Es sollen nämlich für den Augenblick die Abkürzungen

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho_p}\frac{\partial^2 x}{\partial\varrho_q\partial\varrho_k} + \frac{\partial y}{\partial\varrho_p}\frac{\partial^2 y}{\partial\varrho_q\partial\varrho_k} + \frac{\partial z}{\partial\varrho_p}\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho_q\partial\varrho_k} = (p,qk),$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varrho_p}\frac{\partial x}{\partial\varrho_q} + \frac{\partial y}{\partial\varrho_p}\frac{\partial y}{\partial\varrho_q} + \frac{\partial z}{\partial\varrho_p}\frac{\partial z}{\partial\varrho_q} = (p,q), \qquad \frac{\partial(p,q)}{\partial\varrho_k} = (p,q)_k$$

gebraucht werden; Abkürzungen, welche auf der Stelle die Relationen

$$(p,qk) + (q,pk) = (p,q)_k,$$
$$(k,pq) + (p,kq) = (k,p)_q,$$
$$(k,qp) + (q,kp) = (k,q)_p$$

geben. Addirt man von diesen die beiden letzten und subtrahirt die erste, so folgt:

$$2(k,pq) = (k,p)_q + (k,q)_p - (p,q)_k.$$

Und daraus ergeben sich für die in (50.) vorkommenden Coefficienten $(2,31)$ etc. folgende Werthe:

$$2(2,31) = (2,3)_1 + (2,1)_3 - (3,1)_2,$$
$$2(2,32) = (2,3)_2 + (2,2)_3 - (3,2)_2,$$
$$2(2,33) = (2,3)_3 + (2,3)_3 - (3,3)_2,$$

oder, wenn man beachtet, dafs (p,q) seiner Definition zufolge identisch Null ist, sobald p und q verschieden sind, und dafs aufserdem nach $(29^\delta.)$

$$(1,1) = a^2, \qquad (2,2) = b^2, \qquad (3,3) = c^2$$

ist:

$$(2,31) = 0,$$
$$(2,32) = b\frac{\partial b}{\partial\varrho_3},$$
$$(2,33) = -c\frac{\partial c}{\partial\varrho_2}.$$

Setzt man daher der Kürze wegen (wie fortan stets) $\frac{\partial a}{\partial\varrho_k} = a_k$, $\frac{\partial b}{\partial\varrho_k} = b_k$, $\frac{\partial c}{\partial\varrho_k} = c_k$, so verwandelt sich die Formel (50.) in die erste des folgenden Systems:

$$(51.)\quad \begin{cases} \Delta p_1 = \dfrac{bb_3\Delta\varrho_2 - cc_2\Delta\varrho_3}{bc}, \\ \Delta p_2 = \dfrac{cc_1\Delta\varrho_3 - aa_3\Delta\varrho_1}{ca}, \\ \Delta p_3 = \dfrac{aa_2\Delta\varrho_1 - bb_1\Delta\varrho_2}{ab}, \end{cases}$$

in welchem die beiden andern Formeln auf analoge Weise entstehen. Substituirt man nun die Werthe (49.) und (51.) in (48.), so ergiebt sich:

$$(52.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{U} = \left(U_1 + \dfrac{a_2V}{b} + \dfrac{a_3W}{c}\right)\Delta\varrho_1 + \left(U_2 - \dfrac{b_1V}{a}\right)\Delta\varrho_2 + \left(U_3 - \dfrac{c_1W}{a}\right)\Delta\varrho_3, \\ \Delta\mathfrak{V} = \left(V_1 - \dfrac{a_2U}{b}\right)\Delta\varrho_1 + \left(V_2 + \dfrac{b_3W}{c} + \dfrac{b_1U}{a}\right)\Delta\varrho_2 + \left(V_3 - \dfrac{c_2W}{b}\right)\Delta\varrho_3, \\ \Delta\mathfrak{W} = \left(W_1 - \dfrac{a_3U}{c}\right)\Delta\varrho_1 + \left(W_2 - \dfrac{b_3V}{c}\right)\Delta\varrho_2 + \left(W_3 + \dfrac{c_1U}{a} + \dfrac{c_2V}{b}\right)\Delta\varrho_3. \end{cases}$$

Nunmehr bleibt schliefslich noch übrig, $\Delta\varrho_1$, $\Delta\varrho_2$, $\Delta\varrho_3$ durch ΔX, ΔY, ΔZ auszudrücken. Aus den Gleichungen:

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\Delta\varrho_1 + \frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\Delta\varrho_2 + \frac{\partial x}{\partial\varrho_3}\Delta\varrho_3$$

etc.

folgt nach (29^{η}.):

$$\begin{aligned} \Delta x &= \alpha_1 a\Delta\varrho_1 + \alpha_2 b\Delta\varrho_2 + \alpha_3 c\Delta\varrho_3, \\ \Delta y &= \beta_1 a\Delta\varrho_1 + \beta_2 b\Delta\varrho_2 + \beta_3 c\Delta\varrho_3, \\ \Delta z &= \gamma_1 a\Delta\varrho_1 + \gamma_2 b\Delta\varrho_2 + \gamma_3 c\Delta\varrho_3 \end{aligned}$$

und aus diesen durch Auflösung nach $a\Delta\varrho_1$, $b\Delta\varrho_2$, $c\Delta\varrho_3$:

$$a\Delta\varrho_1 = \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y + \gamma_1\Delta z, \qquad b\Delta\varrho_2 = \text{etc.},$$

oder nach (41.):

$$a\Delta\varrho_1 = \overline{MM'}(\alpha_1\cos(\overline{MM'}, x) + \cdots), \qquad b\Delta\varrho_2 = \text{etc.},$$

oder nach (29^{ξ}.):

$$a\Delta\varrho_1 = \overline{MM'}\cos(\overline{MM'}, \tau_1), \qquad b\Delta\varrho_2 = \text{etc.},$$

oder endlich nach (42.):

$$(53.)\quad a\Delta\varrho_1 = \Delta X, \quad b\Delta\varrho_2 = \Delta Y, \quad c\Delta\varrho_3 = \Delta Z.$$

Vergleicht man nun schliefslich die Formeln (52.), nachdem in ihnen für $\Delta\varrho_1$, $\Delta\varrho_2$, $\Delta\varrho_3$ die eben gefundenen Werthe (53.) substituirt sind, mit den Formeln (45.); so ergiebt sich:

$$(54.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = \dfrac{U_1}{a} + \dfrac{a_2 V}{ab} + \dfrac{a_3 W}{ac}, & \mathfrak{U}_2 = \dfrac{U_2}{b} - \dfrac{b_1 V}{ba}, & \mathfrak{U}_3 = \dfrac{U_3}{c} - \dfrac{c_1 W}{ca}, \\ \mathfrak{V}_1 = \dfrac{V_1}{a} - \dfrac{a_2 U}{ab}, & \mathfrak{V}_2 = \dfrac{V_2}{b} + \dfrac{b_3 W}{bc} + \dfrac{b_1 U}{ba}, & \mathfrak{V}_3 = \dfrac{V_3}{c} - \dfrac{c_2 W}{cb}, \\ \mathfrak{W}_1 = \dfrac{W_1}{a} - \dfrac{a_3 U}{ac}, & \mathfrak{W}_2 = \dfrac{W_2}{b} - \dfrac{b_3 V}{bc}, & \mathfrak{W}_3 = \dfrac{W_3}{c} + \dfrac{c_1 U}{ca} + \dfrac{c_2 V}{cb}. \end{cases}$$

Diese Formeln (54.) in Verbindung mit den Formeln (39.) und (40.) stellen den transformirten Werth des Ausdrucks Φ dar.

Zugleich mag bemerkt sein, dafs aus (54.) unmittelbar folgt:

$$(55.)\quad \Theta = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{W}_3 = \frac{1}{a}\frac{\partial(bcU)}{\partial\varrho_1} + \frac{1}{b}\frac{\partial(caV)}{\partial\varrho_2} + \frac{1}{c}\frac{\partial(abW)}{\partial\varrho_3},$$

$$(56.)\quad \begin{cases} \mathfrak{V}_3 - \mathfrak{W}_2 = \dfrac{1}{bc}\left(\dfrac{\partial(bV)}{\partial\varrho_3} - \dfrac{\partial(cW)}{\partial\varrho_2}\right), \\ \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{U}_3 = \dfrac{1}{ca}\left(\dfrac{\partial(cW)}{\partial\varrho_1} - \dfrac{\partial(aU)}{\partial\varrho_3}\right), \\ \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1 = \dfrac{1}{ab}\left(\dfrac{\partial(aU)}{\partial\varrho_2} - \dfrac{\partial(bV)}{\partial\varrho_1}\right). \end{cases}$$

§. 13.

Substitution von Φ in die Formeln für Q.

Es soll gegenwärtig in der für Q erhaltenen Formel (33.) und (36.)

$$(57.)\quad Q\cos(Q, \tau_1) = (\Phi, U),$$

$$(58.)\quad (\Phi, U) = \frac{1}{\nabla}\left\{-\frac{\partial\Phi\nabla}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\Phi\nabla}{\partial U_1} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\Phi\nabla}{\partial U_2} + \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\frac{\partial\Phi\nabla}{\partial U_3}\right)$$

der eben gefundene Werth des Ausdrucks Φ substituirt werden.

Da nach (39.):

$$2\Phi = H + 2K\Theta + (K+3k)\Theta^2 + (K+k)T + (4K+4k)\Delta$$

ist, so folgt aus (28^C.):

$$(\Phi, U) = K(\Theta, U) + \frac{K+3k}{2}(\Theta^2, U) + \frac{K+k}{2}(T, U) + (2K+2k)(\Delta, U)$$

oder, wenn man berücksichtigt, dafs, wie sich augenblicklich ergiebt,

$$(\Theta, u) \equiv (\Theta, v) \equiv (\Theta, w) \equiv 0;$$

dafs ferner, wie bereits in (25.) bemerkt,

$$(\Delta, u) \equiv (\Delta, v) \equiv (\Delta, w) \equiv 0;$$

und dafs demzufolge nach (28^E.) auch

$$(\Theta, U) \equiv 0 \quad \text{und} \quad (\Delta, U) \equiv 0$$

sein mufs:

$$(59.) \qquad (\Phi, U) = \frac{K+3k}{2}(\Theta^2, U) + \frac{K+k}{2}(T, U).$$

Für den ersten dieser beiden Terme giebt die allgemeine Formel (36.) oder (58.) folgenden Werth:

$$(\Theta^2, U) = \frac{1}{\nabla}\left\{-\frac{\partial\Theta^2\nabla}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\Theta^2\nabla}{\partial U_1} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\Theta^2\nabla}{\partial U_2} + \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\frac{\partial\Theta^2\nabla}{\partial U_3}\right\}$$

oder, wenn man beachtet, dafs in dem Ausdruck $\Theta = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{W}_3$ (nach (54.)) weder U_2 noch U_3 enthalten, und dafs ∇ von den Functionen U, V, W überhaupt unabhängig ist:

$$\nabla(\Theta^2, U) = -\nabla\frac{\partial\Theta^2}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\nabla\frac{\partial\Theta^2}{\partial U_1}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (29^{9}.) und (54.):

$$abc(\Theta^2, U) = -abc\,2\Theta\left(\frac{b_1}{ab} + \frac{c_1}{ac}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(abc\frac{2\Theta}{a}\right)$$

oder:

$$abc(\Theta^2, U) = -2\Theta(b_1c + bc_1) + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}(2bc\,\Theta)$$

oder endlich:

$$(60.) \qquad abc(\Theta^2, U) = 2bc\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_1}.$$

In ähnlicher Weise erhält man für den zweiten Term der Gleichung (59.) zuerst nach (58.):

$$\nabla(T, U) = -\frac{\partial T\nabla}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\frac{\partial T\nabla}{\partial U_1} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{\partial T\nabla}{\partial U_2} + \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\frac{\partial T\nabla}{\partial U_3},$$

sodann mit Rücksicht auf die Werthe, welche $\mathfrak{V}_3$, $\mathfrak{W}_2$ etc. in dem Ausdruck $T = (\mathfrak{V}_3 - \mathfrak{W}_2)^2 + (\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{U}_3)^2 + (\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)^2$ den Formeln (54.) zufolge besitzen:

$$\nabla(T, U) = -\nabla\frac{\partial[(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)^2 + (\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1)^2]}{\partial U} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\nabla\frac{\partial(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)^2}{\partial U_2} + \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\nabla\frac{\partial(\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1)^2}{\partial U_3}$$

oder

$$abc(T, U) = -2[(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)a_2c + (\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1)a_3b] + 2\frac{\partial ac(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)}{\partial\varrho_2} + 2\frac{\partial ab(\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1)}{\partial\varrho_3}$$

oder endlich:

$$(61.) \qquad abc(T, U) = 2a\left(\frac{\partial c(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)}{\partial\varrho_2} + \frac{\partial b(\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1)}{\partial\varrho_3}\right).$$

Substituirt man schliefslich in dem Werth (59.) von (Φ, U) die eben berechneten Terme (60.) und (61.), so verwandelt sich die Gleichung (57.)

in die erste des folgenden Systems:

$$(62.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}\cos(\boldsymbol{Q},\tau_1) = \dfrac{K+3k}{a}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varrho_1} + \dfrac{K+k}{bc}\left(\dfrac{\partial\, c(\mathfrak{U}_2-\mathfrak{V}_1)}{\partial\varrho_2} + \dfrac{\partial\, b(\mathfrak{U}_3-\mathfrak{W}_1)}{\partial\varrho_3}\right), \\ \boldsymbol{Q}\cos(\boldsymbol{Q},\tau_2) = \dfrac{K+3k}{b}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varrho_2} + \dfrac{K+k}{ca}\left(\dfrac{\partial\, a(\mathfrak{V}_3-\mathfrak{W}_2)}{\partial\varrho_3} + \dfrac{\partial\, c(\mathfrak{V}_1-\mathfrak{U}_2)}{\partial\varrho_1}\right), \\ \boldsymbol{Q}\cos(\boldsymbol{Q},\tau_3) = \dfrac{K+3k}{c}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\varrho_3} + \dfrac{K+k}{ab}\left(\dfrac{\partial\, b(\mathfrak{W}_1-\mathfrak{U}_3)}{\partial\varrho_1} + \dfrac{\partial\, a(\mathfrak{W}_2-\mathfrak{V}_3)}{\partial\varrho_2}\right), \end{cases}$$

in welchem die beiden andern Gleichungen auf analoge Weise abgeleitet werden können. Um die Transformation der Formeln für die Kraft $\boldsymbol{Q}$ zu vollenden, würde nur noch erforderlich sein, dafs man in diesen Gleichungen (62.) für Θ, $(\mathfrak{V}_3-\mathfrak{W}_2)$, $(\mathfrak{W}_1-\mathfrak{U}_3)$, $(\mathfrak{U}_2-\mathfrak{V}_1)$ die in (55.) und (56.) angegebenen Werthe einsetzt.

§. 14.

Substitution von Φ in die Formeln für $\boldsymbol{P}$.

Nach (33.) und (36.) ist:

$$(63.)\quad \boldsymbol{P}\cos(\boldsymbol{P},\tau_1) = q.(\Phi,\boldsymbol{U})_\nu,$$

$$(64.)\quad (\Phi,\boldsymbol{U})_\nu = \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{U}_1}a\cos(\nu,\tau_1) + \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{U}_2}b\cos(\nu,\tau_2) + \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{U}_3}c\cos\nu,\tau_3).$$

Beachtet man nun, dafs (nach (54.)):

$$\frac{\partial\mathfrak{U}_1}{\partial\boldsymbol{U}_1} = \frac{\partial\mathfrak{V}_1}{\partial\boldsymbol{V}_1} = \frac{\partial\mathfrak{W}_1}{\partial\boldsymbol{W}_1} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{\partial\mathfrak{U}_2}{\partial\boldsymbol{U}_2} = \frac{\partial\mathfrak{V}_2}{\partial\boldsymbol{V}_2} = \frac{\partial\mathfrak{W}_2}{\partial\boldsymbol{W}_2} = \frac{1}{b},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{U}_3}{\partial\boldsymbol{U}_3} = \frac{\partial\mathfrak{V}_3}{\partial\boldsymbol{V}_3} = \frac{\partial\mathfrak{W}_3}{\partial\boldsymbol{W}_3} = \frac{1}{c}$$

ist, und dafs ferner (ebenfalls nach (54.)) alle andern Ableitungen der 9 Gröfsen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$ nach irgend einer der 9 Gröfsen $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, ... $\boldsymbol{W}_3$ Null sind; so ergiebt sich augenblicklich:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{U}_1} = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{U}_1}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{U}_2} = \frac{1}{b}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{U}_2}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{U}_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{U}_3}.$$

Hierdurch verwandelt sich die in (63. 64) für $\boldsymbol{P}$ aufgestellte Formel in die erste des folgenden Systems:

$$(65.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{P}\cos(\boldsymbol{P},\tau_1) = q\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{U}_1}\cos(\nu,\tau_1) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{U}_2}\cos(\nu,\tau_2) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{U}_3}\cos(\nu,\tau_3)\right), \\ \boldsymbol{P}\cos(\boldsymbol{P},\tau_2) = q\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{V}_1}\cos(\nu,\tau_1) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{V}_2}\cos(\nu,\tau_2) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{V}_3}\cos(\nu,\tau_3)\right), \\ \boldsymbol{P}\cos(\boldsymbol{P},\tau_3) = q\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{W}_1}\cos(\nu,\tau_1) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{W}_2}\cos(\nu,\tau_2) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathfrak{W}_3}\cos(\nu,\tau_3)\right), \end{cases}$$

in welchem die beiden andern Formeln in ähnlicher Weise zu erhalten sind. Vergleicht man diese Werthe der $\boldsymbol{P}\cos(\boldsymbol{P},\tau_k)$ mit den in (22.) für die $\boldsymbol{P}_k$ aufgestellten; und beachtet man, dafs (nach (39.) und (40.)) der transformirte Werth von Φ aus den 9 Gröfsen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$ ganz ebenso zusammengesetzt ist, wie der ursprüngliche Werth von Φ aus den 9 Gröfsen u_1, u_2, ... w_3; so ist klar, dafs die hier erhaltenen Formeln (65.) den dort aufgestellten (22.) vollständig analog sind, dafs nämlich die einen Formeln in die andern übergehen, wenn man die Buchstaben x, y, z, u_1, u_2, ... w_3 respective mit τ_1, τ_2, τ_3, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$ vertauscht. Die Formeln (22.) sind identisch mit denen in (26.). Wollte man also die Transformation der Formeln für die Kraft $\boldsymbol{P}$ vollständig durchführen, so hätte man nur in jenen Gleichungen (26.) durchgängig x, y, z, u_1, u_2, ... w_3 mit τ_1, τ_2, τ_3, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$ zu vertauschen, und sodann schliefslich für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... $\mathfrak{W}_3$ die in (54.) aufgestellten Werthe zu substituiren.

Halle, im October 1859.

Theorie der circularpolarisirenden Medien.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Im 25sten Bande der *Comptes Rendus* hat *Cauchy* das System von Differentialgleichungen, welches der Moleculartheorie zufolge die Bewegungen eines elastischen Mediums darstellt, durch Hinzufügung gewisser, physikalisch noch nicht vollkommen erklärter Terme für die Darstellung der Erscheinungen der Circularpolarisation brauchbar zu machen gesucht. Indefs ist mir nicht bekannt, dafs die vollständige Theorie jener Gleichungen, welche ein vielfaches Interesse darzubieten scheint, jemals irgendwo gegeben wäre. Ich habe daher eine solche Darstellung im Folgenden unternommen, und dabei auch jene Fälle nicht aufser Augen gelassen, welche den zweiaxigen Krystallen analog sein würden. Denn obwohl bis jetzt keine zweiaxigen Krystalle bekannt sind, welche die Erscheinungen der circularen Polarisation aufweisen, so scheint es doch nicht unmöglich, ja fast natürlich, dafs dergleichen in der Natur existiren, so wie der Quarz ein Beispiel für die einaxigen darbietet. Vor allem aber erfordert die elegantere und übersichtlichere Darstellung der Theorie die Behandlung des allgemeineren Falles, woraus sich dann die Theorie der einaxigen Krystalle auf die leichteste Weise ergiebt; so wie denn die *Macculagh*sche Theorie einen äufserst einfachen Fall der gegenwärtigen Resultate darstellt.

Ich habe zugleich versucht, die Gleichungen auf eine Weise zu deuten, welche von der früher versuchten wesentlich verschieden ist. Aber es scheint aufser Zweifel, dafs die Versuche von *Cauchy* und *Laurent*, aus der blofsen Molecularanziehung diese Gleichungen zu erklären, verwickelt und gezwungen ausgefallen sind, und dafs es nicht unpassend sein dürfte, eine einfache Erklärung an die Stelle zu setzen, wenn auch dieselbe den Boden der blofsen Molecularanziehungen verläfst und einige Verwandtschaft mit dem *Weber*schen und *Ampère*schen Gesetze zeigt. Ist doch auch das erstere vor nicht langer Zeit von Herrn *Neumann* mit Erfolg zur Erklärung derjenigen Drehung benutzt worden, welche die Polarisationsebene durch den electrischen Strom erfährt *).

*) *C. Neumann*, Dissertation, Halle 1858.

Ich beginne damit, die *Cauchy*schen Gleichungen in derselben Weise zu begründen, wie es von *Cauchy* selbst im 30sten Bande der *Comptes Rendus* geschehen ist.

§. 1.

Aufstellung der Gleichungen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Molecüls in der Ruhelage, x_1, y_1, z_1 die eines benachbarten, m, m_1 ihre Massen, u, v, w und u_1, v_1, w_1 die Projectionen ihrer Verschiebungen auf die Coordinatenaxen. Die Bewegungsgleichungen für das System von Molecülen sollen so beschaffen sein, dafs die Beschleunigungen eines Molecüls sich als lineare Functionen der relativen Verschiebungen der übrigen Molecüle darstellen, so dafs also die Form der Gleichungen folgende ist:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} = \Sigma m_1(a\ (u_1-u)+b\ (v_1-v)+c\ (w_1-w)), \\ \frac{d^2v}{dt^2} = \Sigma m_1(a'\ (u_1-u)+b'\ (v_1-v)+c'\ (w_1-w)), \\ \frac{d^2w}{dt^2} = \Sigma m_1(a''(u_1-u)+b''(v_1-v)+c''(w_1-w)), \end{cases}$$

wo die Summe sich auf alle Molecüle m_1 erstreckt, und a, b, c etc. nur von den relativen Coordinaten der Ruhelage

$$x_1-x, \qquad y_1-y, \qquad z_1-z$$

abhängig sind. Die gedachten Eigenschaften finden sich sämmtlich bei den gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung eines Systems von Molecülen, wenn sich dieselben nach irgend einer Function der Entfernung anziehen.

Die Beschleunigung in irgend einer durch die Cosinus α, β, γ angedeuteten Richtung soll nun allein von den geometrischen Beziehungen abhängen, welche zwischen dieser Richtung, der Richtung der ursprünglichen und der späteren Verbindungslinie der Molecüle m, m_1 eintreten. Diese drei Richtungen sind gegeben durch die Projectionen

α	x_1-x	x_1-x+u_1-u
β	y_1-y	y_1-y+v_1-v
γ	z_1-z	z_1-z+w_1-w;

und die geometrischen Beziehungen kann man repräsentirt denken durch die relativen Entfernungen

$r^2 = (x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2$ und

$\varrho^2 = (x_1-x+u_1-u)^2+(y_1-y+v_1-v)^2+(z_1-z+w_1-w)^2,$

zu denen die analoge Gröfse $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ hinzutritt; so wie durch die Producte der Radien mit den Cosinus der von zweien der Richtungen eingeschlossenen Winkel:

$\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z),$

$\alpha(x_1-x+u_1-u)+\beta(y_1-y+v_1-v)+\gamma(z_1-z+w_1-w),$

$(x_1-x)(x_1-x+u_1-u)+(y_1-y)(y_1-y+v_1-v)+(z_1-z)(z_1-z+w_1-w).$

Die Beschleunigung in der gegebenen Richtung:

$$\alpha\frac{d^2u}{dt^2}+\beta\frac{d^2v}{dt^2}+\gamma\frac{d^2w}{dt^2}$$

$$=\Sigma m_1((u_1-u)(\alpha a+\beta a'+\gamma a'')+(v_1-v)(\alpha b+\beta b'+\gamma b'')+(w_1-w)(\alpha c+\beta c'+\gamma c''))$$

darf also nur von den sechs Gröfsen

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $(x_1-x)(u_1-u)+(y_1-y)(v_1-v)+(z_1-z)(w_1-w)$,

$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2$, $\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)$,

$(u_1-u)^2+(v_1-v)^2+(w_1-w)^2$, $\alpha(u_1-u)+\beta(v_1-v)+\gamma(w_1-w)$

abhängig sein, welche die oben aufgeführten sechs Gröfsen ersetzen, so wie von beliebigen Combinationen derselben. Unter den letztern verdient nur eine hervorgehoben zu werden, nämlich die Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha & x_1-x & u_1-u\\ \beta & y_1-y & v_1-v\\ \gamma & z_1-z & w_1-w\end{vmatrix},$$

deren Quadrat sich rational durch jene Gröfsen ausdrückt, und welche der einzige rationale Ausdruck ist, welcher durch irrationale Operationen aus denselben erhalten werden kann. Da nun ferner aber die gesuchte Beschleunigung sich offenbar in α, β, γ, so wie in u_1-u, v_1-v, w_1-w rational und linear ausdrückt, so bleibt nur übrig, dafs der Ausdruck unter dem Σ sich als lineare Function der drei Gröfsen

$$\alpha(u_1-u)+\beta(v_1-v)+\gamma(w_1-w),$$

$$\{\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)\}\{(x_1-x)(u_1-u)+(y_1-y)(v_1-v)+(z_1-z)(w_1-w)\},\ \Delta$$

darstellen mufs, deren Coefficienten allein von r abhängen und durch $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ bezeichnet sein sollen.

Vergleicht man daher diesen Ausdruck mit dem Ausdruck der gesuchten Beschleunigung, so findet sich:

$$\begin{aligned}
a &= \varphi(r)+\psi(r)(x_1-x)^2,\\
a' &= \chi(r)(z_1-z)+\psi(r)(y_1-y)(x_1-x),\\
a'' &= -\chi(r)(y_1-y)+\psi(r)(z_1-z)(x_1-x),\\
b &= -\chi(r)(z_1-z)+\psi(r)(x_1-x)(y_1-y),\\
b' &= \varphi(r)+\psi(r)(y_1-y)^2,\\
b'' &= \chi(r)(x_1-x)+\psi(r)(z_1-z)(y_1-y),\\
c &= \chi(r)(y_1-y)+\psi(r)(x_1-x)(z_1-z),\\
c' &= -\chi(r)(x_1-x)+\psi(r)(y_1-y)(z_1-z),\\
c'' &= \varphi(r)+\psi(r)(z_1-z)^2.
\end{aligned}$$

Und demnach nehmen die Gleichungen (1.) folgende Gestalt an, welche den gestellten Bedingungen auf die allgemeinste Weise entspricht:

$$(2.)\quad \begin{cases}
\frac{d^2u}{dt^2} = \Sigma m_1[\varphi(r)(u_1-u)+\psi(r)(x_1-x)\{(x_1-x)(u_1-u)+(y_1-y)(v_1-v)+(z_1-z)(w_1-w)\}\\
\qquad +\chi(r)((y_1-y)(w_1-w)-(z_1-z)(v_1-v))],\\
\frac{d^2v}{dt^2} = \Sigma m_1[\varphi(r)(v_1-v)+\psi(r)(y_1-y)\{(x_1-x)(u_1-u)+(y_1-y)(v_1-v)+(z_1-z)(w_1-w)\}\\
\qquad +\chi(r)((z_1-z)(u_1-u)-(x_1-x)(w_1-w))],\\
\frac{d^2w}{dt^2} = \Sigma m_1[\varphi(r)(w_1-w)+\psi(r)(z_1-z)\{(x_1-x)(u_1-u)+(y_1-y)(v_1-v)+(z_1-z)(w_1-w)\}\\
\qquad +\chi(r)((x_1-x)(v_1-v)-(y_1-y)(u_1-u))].
\end{cases}$$

Nur durch die letzten Glieder unterscheiden sich diese Gleichungen von den gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung elastischer Medien. Denn obwohl dieselben eine Beziehung aufstellen zwischen den Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$, so ist doch dieser Umstand unwesentlich, da er auf den ferneren Gang der Untersuchung durchaus keinen Einflufs übt.

§. 2

Physikalische Deutung der Gleichungen.

Ich will versuchen diese von ***Cauchy*** für isotrope Medien aufgestellten Gleichungen einer physikalischen Deutung zu unterwerfen, wenn auch die Hypothese etwas gewagt scheinen mag, welche sich mir zur Aufstellung der Gleichungen dargeboten hat.

Nehmen wir an ***dafs zwar in jedem Augenblick die Molecüle sich nach einer Function $f(r)$ der Entfernung anziehen, dafs aber aufser-***

dem durch die Bewegung selbst auf irgend eine Weise in denselben in jedem Augenblick eine (nicht wieder verschwindende) Kraft erregt wird, welche senkrecht gerichtet sein soll gegen eine, der Verbindungslinie und der relativen Geschwindigkeit gleichzeitig parallele Ebene. Da sich die Cosinus der Verbindungslinie gegen die Axe verhalten wie

$$x_1 - x + u_1 - u : y_1 - y + v_1 - v : z_1 - z + w_1 - w,$$

die Cosinus der Richtung der relativen Geschwindigkeit aber wie

$$\frac{d(u_1-u)}{dt} : \frac{d(v_1-v)}{dt} : \frac{d(w_1-w)}{dt},$$

so sind die Cosinus der Normale derjenigen Ebene, welche beiden Richtungen parallel ist, mit Vernachlässigung von Gröfsen höherer Ordnung, proportional mit

$$(y_1-y)\frac{d(w_1-w)}{dt} - (z_1-z)\frac{d(v_1-v)}{dt},$$

$$(z_1-z)\frac{d(u_1-u)}{dt} - (x_1-x)\frac{d(w_1-w)}{dt},$$

$$(x_1-x)\frac{d(v_1-v)}{dt} - (y_1-y)\frac{d(u_1-u)}{dt},$$

und damit die Summe der Quadrate gleich 1 sei, mufs man diese Gröfsen, um die Cosinus selbst zu erhalten, dividiren durch

$$\pm \nu r \sin\alpha,$$

durch ν die relative Geschwindigkeit der Molecüle bezeichnet, durch α aber den Winkel, welchen deren Richtung gegen die Verbindungslinie (r oder ϱ) der Molecüle bildet.

Dieses Nenners wegen nehme ich nun an, ***dafs die gedachte, in jedem Augenblick entstehende Kraft proportional ist einer Function der relativen Entfernung $F(r)$ und derjenigen Componenten $\nu\sin\alpha$ der relativen Geschwindigkeit, welche gegen die Verbindungslinie senkrecht ist.***

Dann sind die Componenten der Kraft, welche in dem Zeitmoment dt entsteht, offenbar

$$mm_1\frac{F(r)}{r}\{(y_1-y)(dw_1-dw)-(z_1-z)(dv_1-dv)\},$$

$$mm_1\frac{F(r)}{r}\{(z_1-z)(du_1-du)-(x_1-x)(dw_1-dw)\},$$

$$mm_1\frac{F(r)}{r}\{(x_1-x)(dv_1-dv)-(y_1-y)(du_1-du)\}.$$

Um daher die Componenten zu finden, welche auf diese Weise vom Beginn der Bewegung, wo alle u, v, w Null sind, bis zu einer beliebigen Zeit entstanden sind, hat man nur zu integriren, und erhält

$$mm_1\frac{F(r)}{r}\{(y_1-y)(w_1-w)-(z_1-z)(v_1-v)\},$$

$$mm_1\frac{F(r)}{r}\{(z_1-z)(u_1-u)-(x_1-x)(w_1-w)\},$$

$$mm_1\frac{F(r)}{r}\{(x_1-x)(v_1-v)-(y_1-y)(u_1-u)\},$$

welches genau die zur Bildung der letzten Glieder in (2.) nothwendigen Componenten sind, wenn man durch $\chi(r)$ die Function

$$\chi(r)=\frac{F(r)}{r}$$

bezeichnet. Da die andern Glieder der Gleichungen (2.) aus der Function $f(r)$ auf sehr bekannte Weise erhalten werden, so sieht man, dafs in der That die angenommene Hypothese genügt um auf diese Gleichungen zu führen. Ich wende mich aber dazu aus den Gleichungen (2.) die Folgerungen zu ziehen, welche die aus ihnen erklärbaren Lichterscheinungen umfassen.

§. 3.

Einfachste Integrale.

Nach dem Vorgange von *Cauchy* setzt man die Integrale der Gleichungen (2.) und ähnlicher aus particularen Integralen zusammen, welche die Gestalt haben

$$(3.)\quad\begin{cases}\overline{u}=Ae^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x+\beta y+\gamma z-mt)\sqrt{-1}},\\ \overline{v}=Be^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x+\beta y+\gamma z-mt)\sqrt{-1}},\\ \overline{w}=Ce^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x+\beta y+\gamma z-mt)\sqrt{-1}}.\end{cases}$$

Darin sind A, B, C reelle oder imaginäre Gröfsen, welche für alle Molecüle die nämlichen Werthe haben; ferner α, β, γ, λ willkürliche reelle Gröfsen, welche die Bedingung

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

erfüllen. Wenn man sodann von den Ausdrücken (3.) nur die reellen Theile zurückbehält, so stellen sie reelle Bewegungen dar, α, β, γ sind die Cosinus der Normale der Wellenebene gegen die Axe, λ die Wellenlänge, m oder

der reelle Theil von m die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Es kommt zunächst darauf an die Beziehungen zu ermitteln, welche zwischen diesen Gröfsen eintreten müssen, damit $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ als particulare Integrale der Gleichungen (2.) angesehen werden dürfen.

Führt man die Ausdrücke (3.) in die Gleichungen (2.) ein, so kann man denselben sehr leicht folgende Gestalt geben, welche im Folgenden zu Grunde gelegt werden soll:

$$(4.)\quad \begin{cases} A(m^2+\mu) = c_{11}A + c_{12}B + c_{13}C + (c_2C - c_3B)\sqrt{-1}, \\ B(m^2+\mu) = c_{12}A + c_{22}B + c_{23}C + (c_3A - c_1C)\sqrt{-1}, \\ C(m^2+\mu) = c_{13}A + c_{23}B + c_{33}C + (c_1B - c_2A)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Darin sind μ und die Gröfsen c durch die drei Grundfunctionen

$$(5.)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{\lambda^2}{4\pi^2}\Sigma m_1\varphi(r)\left\{e^{[\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)]\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}} - 1\right\}, \\ H = \dfrac{\lambda^4}{16\pi^4}\Sigma m_1\psi(r)\left\{e^{[\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)]\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}} - 1\right. \\ \qquad\qquad - [\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)]\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda} \\ \qquad\qquad \left. - \tfrac{1}{2}[\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)]^2\cdot\left(\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}\right)^2\right\}, \\ K = \dfrac{\lambda^3}{8\pi^3}\Sigma m_1\chi(r)\left\{e^{[\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)]\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}} - 1\right. \\ \qquad\qquad \left. - [\alpha(x_1-x)+\beta(y_1-y)+\gamma(z_1-z)]\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\lambda}\right\} \end{cases}$$

in solcher Weise ausgedrückt, dafs

$$(6.)\quad \begin{cases} c_{11} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\alpha^2}, & c_{23} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\beta\,\partial\gamma}, & c_1 = \dfrac{\partial K}{\partial\alpha}, \\ c_{22} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\beta^2}, & c_{31} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\gamma\,\partial\alpha}, & c_2 = \dfrac{\partial K}{\partial\beta}, \\ c_{33} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\gamma^2}, & c_{12} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\alpha\,\partial\beta}, & c_3 = \dfrac{\partial K}{\partial\gamma}. \end{cases}$$

Denkt man sich das Medium homogen und die Summen (5.) ausgeführt, so werden dieselben nur von den Gröfsen α, β, γ, λ abhängig, nehmen aber für alle Punkte des Systems dieselben Werthe an; wodurch die Annahme gerechtfertigt ist, dafs A, B, C, m gleichfalls für alle Punkte des Systems die nämlichen Werthe erhalten sollen.

Wenn man aus den Gleichungen (4.) die Verhältnisse der A, B, C eliminirt, so findet sich eine cubische Gleichung für m^2. Man sieht also, dafs

eine Welle von gegebener Richtung und Wellenlänge sich mit drei verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bewegen kann, welche den drei Wurzeln der cubischen Gleichung entsprechen, und zwar nach beiden Seiten der ursprünglichen Welle, da das Vorzeichen von m selbst noch unbestimmt bleibt. Das Resultat der Elimination ist die Determinante

$$(7.) \qquad \varrho = \begin{vmatrix} c_{11}-m^2-\mu & c_{12}-c_3\sqrt{-1} & c_{13}+c_2\sqrt{-1} \\ c_{12}+c_3\sqrt{-1} & c_{22}-m^2-\mu & c_{23}-c_1\sqrt{-1} \\ c_{13}-c_2\sqrt{-1} & c_{23}+c_1\sqrt{-1} & c_{33}-m^2-\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man aber durch Δ diejenige Determinante, welche man erhalten würde, wenn die von der Circularpolarisation abhängigen Glieder nicht vorhanden wären,

$$(8.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} c_{11}-m^2-\mu & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22}-m^2-\mu & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33}-m^2-\mu \end{vmatrix}$$

und durch Δ die Function, welche für die c_1, c_2, c_3 von der zweiten Ordnung ist, und als deren Determinante Δ angesehen werden kann:

$$(9.) \qquad \Delta = c_1^2(c_{11}-m^2-\mu)+c_2^2(c_{22}-m^2-\mu)+c_3^2(c_{33}-m^2-\mu) + 2c_{23}c_2c_3+2c_{31}c_3c_1+2c_{12}c_1c_2,$$

so nimmt die Gleichung (7.) ohne Weiteres die Form an:

$$(10.) \qquad S = \Delta - \Delta = 0.$$

Diese Gleichung hat merkwürdige Eigenschaften, wodurch sie und die Gleichungen (4.) als eine natürliche Erweiterung derjenigen Gleichungen erscheinen, auf welche man in der Theorie der Säcularstörungen und in so vielen andern Fragen geführt wird. ***Sind nämlich die Gröfsen c sämmtlich reell, so sind die Wurzeln der Gleichung*** (10.) ***gleichfalls immer reell; und sind etwa noch zwei dieser Wurzeln einander gleich, so reduciren sich die Gleichungen*** (4.) ***auf eine einzige, sobald man für*** m^2 ***eine dieser gleichen Wurzeln einführt.***

Die Realität der Gröfsen c soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden. Hierzu ist es z. B. hinreichend, wenn auf jeder durch ein Molecül gezogenen Linie die von ihr etwa innerhalb der Anziehungssphäre getroffenen Molecüle sich symmetrisch vertheilen. Denn wenn man unter dieser Voraussetzung die Exponentialgröfsen in μ, H, K nach Potenzen entwickelt und die Summe ausführt, so entspricht jedem Punkte m_1 ein anderer, dessen

relative Coordinaten x_1-x, y_1-y, z_1-z sich von denen des ersteren nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Indem man daher das von solchen Punkten herrührende zusammennimmt, zeigt es sich, dafs alle Glieder, welche ungerade Dimensionen der relativen Coordinaten oder ungerade Potenzen von $\sqrt{-1}$ enthalten, sich gegenseitig zerstören, und dafs die Functionen μ, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{K}$ daher nothwendig reell sind; ebenso aber dann auch die c, welche durch Differentiation aus diesen fliefsen.

Ich werde aber die oben angedeuteten Sätze nunmehr zunächst nicht an dem System (4.) sondern an dem allgemeinsten System beweisen, welches sich in analoger Weise aufstellen läfst. Dasselbe ist folgendes:

$$(11.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{A}_1 x = (c_{11}\boldsymbol{A}_1 + c_{12}\boldsymbol{A}_2 + c_{13}\boldsymbol{A}_3 + \cdots + c_{1n}\boldsymbol{A}_n) \\ \qquad + \sqrt{-1}\,(b_{11}\boldsymbol{A}_1 + b_{12}\boldsymbol{A}_2 + b_{13}\boldsymbol{A}_3 + \cdots + b_{1n}\boldsymbol{A}_n), \\ \boldsymbol{A}_2 x = (c_{21}\boldsymbol{A}_1 + c_{22}\boldsymbol{A}_2 + c_{23}\boldsymbol{A}_3 + \cdots + c_{2n}\boldsymbol{A}_n) \\ \qquad + \sqrt{-1}\,(b_{21}\boldsymbol{A}_1 + b_{22}\boldsymbol{A}_2 + b_{23}\boldsymbol{A}_3 + \cdots + b_{2n}\boldsymbol{A}_n), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{A}_n x = (c_{n1}\boldsymbol{A}_1 + c_{n2}\boldsymbol{A}_2 + c_{n3}\boldsymbol{A}_3 + \cdots + c_{nn}\boldsymbol{A}_n) \\ \qquad + \sqrt{-1}\,(b_{n1}\boldsymbol{A}_1 + b_{n2}\boldsymbol{A}_2 + b_{n3}\boldsymbol{A}_3 + \cdots + b_{nn}\boldsymbol{A}_n); \end{cases}$$

wobei

$$(12.)\qquad c_{ik} = c_{ki},\quad b_{ik} + b_{ki} = 0,\quad b_{ii} = 0,$$

so dafs die c die Elemente einer symmetrischen Determinante, die b dagegen die einer Determinante bedeuten, deren gegen die Diagonale symmetrisch liegende Elemente entgegengesetztes Vorzeichen haben. Das System (11.) geht für $n = 3$ in das System (4.) über, wenn

$$c_1 = b_{32} = -b_{23},\quad c_2 = b_{13} = -b_{31},\quad c_3 = b_{21} = -b_{12}$$

gesetzt wird.

Da die Gröfsen c, b sämmtlich reell vorausgesetzt werden, so kann man setzen:

$$(13.)\qquad \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{Q}_i\sqrt{-1},$$

und das System (11.) in die beiden zerfällen:

$$(14.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{P}_i x = (c_{i1}\boldsymbol{P}_1 + c_{i2}\boldsymbol{P}_2 + \cdots + c_{in}\boldsymbol{P}_n) - (b_{i1}\boldsymbol{Q}_1 + b_{i2}\boldsymbol{Q}_2 + \cdots + b_{in}\boldsymbol{Q}_n), \\ \boldsymbol{Q}_i x = (c_{i1}\boldsymbol{Q}_1 + c_{i2}\boldsymbol{Q}_2 + \cdots + c_{in}\boldsymbol{Q}_n) + (b_{i1}\boldsymbol{P}_1 + b_{i2}\boldsymbol{P}_2 + \cdots + b_{in}\boldsymbol{P}_n), \end{cases}$$

wo denn die $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ sämmtlich reell sein können, sobald x reell ist. Ist ferner x' eine andere Wurzel der Gleichung vom n^{ten} Grade

$$(15.)\quad S=0=\begin{vmatrix} c_{11}+b_{11}\sqrt{-1}-x & c_{12}+b_{12}\sqrt{-1} & c_{13}+b_{13}\sqrt{-1} & \dots & c_{1n}+b_{1n}\sqrt{-1} \\ c_{21}+b_{21}\sqrt{-1} & c_{22}+b_{22}\sqrt{-1}-x & c_{23}+b_{23}\sqrt{-1} & \dots & c_{2n}+b_{2n}\sqrt{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}+b_{n1}\sqrt{-1} & c_{n2}+b_{n2}\sqrt{-1} & c_{n3}+b_{n3}\sqrt{-1} & \dots & c_{nn}+b_{nn}\sqrt{-1}-x \end{vmatrix},$$

welche man für x aus (11.) durch Elimination der A erhält, und sind P', Q' für x' dasselbe, was P, Q für x, so ist auch

$$P'_i x' = (c_{i1}P'_1 + c_{i2}P'_2 + \dots + c_{in}P'_n) - (b_{i1}Q'_1 + b_{i2}Q'_2 + \dots + b_{in}Q'_n),$$
$$Q'_i x' = (c_{i1}Q'_1 + c_{i2}Q'_2 + \dots + c_{in}Q'_n) + (b_{i1}P'_1 + b_{i2}P'_2 + \dots + b_{in}P'_n);$$

und wenn man nun diese Gleichungen mit Q_i, P_i, die Gleichungen (14.) mit Q'_i, P'_i multiplicirt, so erhält man leicht nach einem bekannten Satz über die homogenen Functionen zweiter Ordnung die Combinationen:

$$(x-x')\Sigma_i P_i P'_i = \Sigma_i\Sigma_k b_{ik}(P_i Q'_k - Q_k P'_i),$$
$$(x-x')\Sigma_i Q_i Q'_i = \Sigma_i\Sigma_k b_{ik}(P_k Q'_i - Q_i P'_k),$$
$$(x-x')\Sigma_i Q_i P'_i = \Sigma_i\Sigma_k b_{ik}(P_k P'_i + Q_i Q'_k),$$
$$(x-x')\Sigma_i Q'_i P_i = -\Sigma_i\Sigma_k b_{ik}(P_i P'_k + Q_k Q'_i).$$

Da nun die rechten Theile nach (12.) ihre Zeichen ändern, wenn man die Indices i, k vertauscht, so folgen hieraus, wenn x, x' von einander verschieden sind, die Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} \Sigma_i P_i P'_i + \Sigma_i Q_i Q'_i = 0, \\ \Sigma_i P_i Q'_i - \Sigma_i Q_i P'_i = 0, \end{cases}$$

welche Fundamentaleigenschaften des Systems (11.) angeben.

Die erste Gleichung (16.) zeigt, *dafs alle Wurzeln der Gleichung* (15.) *reell sein müssen.* Denn hätte x die Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, so könnte, da die Coefficienten in S offenbar sämmtlich reell sind, x' die Form $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ annehmen. Dann könnte man aber auch setzen

$$P_i = R_i + S_i\sqrt{-1}, \qquad Q_i = T_i + U_i\sqrt{-1},$$
$$P'_i = R_i - S_i\sqrt{-1}, \qquad Q'_i = T_i - U_i\sqrt{-1},$$

und die erste Gleichung (16.) ginge über in

$$\Sigma_i(R_i^2 + S_i^2 + T_i^2 + U_i^2) = 0,$$

was unmöglich ist, da die R, S, T, U sämmtlich reelle Gröfsen bedeuten.

Sind aber zwei Wurzeln der Gleichung $S=0$ *einander gleich, so reduciren sich die n Gleichungen* (11.) *auf nicht mehr als* $n-2$ *von einander verschiedene.* Es mufs nämlich alsdann aufser S auch noch $\frac{\partial S}{\partial x}$

verschwinden. Bezeichnet man nun durch S_{ik} die Differentialquotienten der Determinante S nach ihren einzelnen Elementen, so ist die Gleichung $\frac{\partial S}{\partial x}=0$ identisch mit der folgenden:

$$(17.) \qquad S_{11}+S_{22}+\ldots+S_{nn}=0.$$

Da aber S verschwindet, so kann man bekanntlich immer solche Gröfsen $p_1, q_1, \ldots$ bestimmen, dafs

$$S_{ik}=p_i q_k, \quad S_{ki}=p_k q_i.$$

Nun zeigt der blofse Anblick von S, dafs S_{ki} und S_{ik} sich nur durch das Vorzeichen ihres imaginären Theils von einander unterscheiden. Man kann daher auch die p, q immer so bestimmen, dafs zwischen p_i, q_i nur derselbe Unterschied stattfindet, d. h. dafs

$$p_i=\alpha_i+\beta_i\sqrt{-1}, \qquad q_i=\alpha_i-\beta_i\sqrt{-1}.$$

Führt man nun dies in (17.) ein, so erhält man

$$\Sigma_i(\alpha_i^2+\beta_i^2)=0,$$

d. h. alle α, β müssen verschwinden, mithin auch alle S_{ik}; und dies giebt genau die oben bezeichnete Eigenschaft, dafs die Gleichungen (11.) sich auf nicht mehr als $n-2$ reduciren.

Hierdurch sind die beiden angegebenen Sätze auch für das System (4.) und die Gleichung (7.) bewiesen. Indefs ist es zweckmäfsig, den ersten derselben noch direct aus der Form (10.) abzuleiten, was sehr leicht ist, und was zugleich Grenzen für die Lage der Wurzeln angiebt. Zu diesem Ende denke ich mir drei lineare Verbindungen a_1, a_2, a_3 der c_1, c_2, c_3 so bestimmt, dafs die beiden identischen Gleichungen erfüllt werden

$$\Sigma c_i c_k c_{ik} = \lambda_1 a_1^2+\lambda_2 a_2^2+\lambda_3 a_3^2,$$
$$c_1^2+c_2^2+c_3^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2.$$

Nach der Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung ist dies immer auf reelle Weise möglich; und zwar bestimmen sich die λ aus der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda, & c_{12}, & c_{13} \\ c_{21}, & c_{22}-\lambda, & c_{23} \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

so dafs man offenbar die identische Gleichung hat:

$$\Delta = (\lambda_1-m^2-\mu)(\lambda_2-m^2-\mu)(\lambda_3-m^2-\mu).$$

Daher nimmt die Gleichung (10.), indem man diese Werthe in dieselbe einführt, die Gestalt an:

$$0 = (\lambda_1 - m^2 - \mu)(\lambda_2 - m^2 - \mu)(\lambda_3 - m^2 - \mu) - a_1^2(\lambda_1 - m^2 - \mu) - a_2^2(\lambda_2 - m^2 - \mu) - a_3^2(\lambda_3 - m^2 - \mu).$$

Setzt man hier der Reihe nach $m^2 + \mu = +\infty$, λ_1, λ_3, $-\infty$ und ist $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, so findet sich der Ausdruck rechts abwechselnd positiv und negativ. Und dies giebt also den Satz:

Von den drei Wurzeln der Gleichung (10.) ***ist eine gröfser als die gröfste Wurzel der Gleichung*** $\Delta = 0$, ***eine andere kleiner als die kleinste Wurzel jener Gleichung, während die dritte zwischen der gröfsten und kleinsten Wurzel derselben liegt.***

§. 4.

Bewegungsellipsen für die drei Wellen.

Um die wirklichen Bewegungen anzugeben, welche den Integralen (3.) entsprechen, hat man nur diese auf ihre reellen Theile zu reduciren, welche den Bewegungsgleichungen für sich genügen müssen. Hierbei ist zu bemerken, dafs die A, B, C einen gemeinschaftlichen Factor $e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}$ enthalten können, welcher wegen der darin enthaltenen willkürlichen Constante τ ganz beliebig ist. Setzt man also

$$(17^a.) \quad \begin{cases} A = (A' + A''\sqrt{-1})\, e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}, \\ B = (B' + B''\sqrt{-1})\, e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}, \\ C = (C' + C''\sqrt{-1})\, e^{\frac{2\pi m\tau}{\lambda}\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

so werden die reellen Theile von (3.) folgende:

$$(18.) \quad \begin{cases} u = A'\cos\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right) - A''\sin\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right), \\ v = B'\cos\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right) - B''\sin\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right), \\ w = C'\cos\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right) - C''\sin\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)}{\lambda} 2\pi\right), \end{cases}$$

wenn, wie im Folgenden vorausgesetzt werden soll, m reell ist. Für die Bewegungen, welche den beiden andern Wurzeln der cubischen Gleichung entsprechen, sollen m, τ, A' etc. die Indices 1, 2 erhalten, und auch diese Wurzeln sollen als reell betrachtet werden.

Die Gleichungen (18.) stellen eine Ellipse dar, deren Mittelpunkt in die Ruhelage des bewegten Molecüls fällt, und deren Ebene durch die Gleichung

$$(19.) \quad 0 = u(B'C'' - C'B'') + v(C'A'' - A'C'') + w(A'B'' - B'A'')$$

ausgedrückt ist. Diese Ellipse hat ferner zwei conjugirte Durchmesser, deren Endpunkte die Coordinaten A', B', C' und A'', B'', C'' haben; denn um den Endpunkt des Durchmessers A', B', C' zu finden, hat man nur $\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)$ gleich Null zu setzen; und man erhält für eben diesen Werth dann leicht

$$du : dv : dw = A'' : B'' : C'';$$

d. h. die Tangente am Endpunkte des einen Durchmessers ist dem andern parallel, daher die Durchmesser conjugirt, wie es sein sollte.

Die Curve aber, welche die Gleichungen (18.) darstellen, bleibt ungeändert, wenn man das Argument des sin. und cos. um eine beliebige Gröfse ϑ vermehrt und vermindert. Setzt man dann der Kürze wegen

$$(20.) \quad U = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z - m(t-\tau)) - \vartheta,$$

so gehen die Gleichungen (18.) über in

$$(21.) \quad \begin{cases} u = (A'\cos\vartheta - A''\sin\vartheta)\cos U - (A'\sin\vartheta + A''\cos\vartheta)\sin U, \\ v = (B'\cos\vartheta - B''\sin\vartheta)\cos U - (B'\sin\vartheta + B''\cos\vartheta)\sin U, \\ w = (C'\cos\vartheta - C''\sin\vartheta)\cos U - (C'\sin\vartheta + C''\cos\vartheta)\sin U. \end{cases}$$

Diese Formeln stellen, da ϑ ganz beliebig ist, die Curve dar, bezogen auf ein *beliebiges* System conjugirter Durchmesser, deren Endpunkte die Coordinaten haben:

$$A'\cos\vartheta - A''\sin\vartheta, \quad B'\cos\vartheta - B''\sin\vartheta, \quad C'\cos\vartheta - C''\sin\vartheta,$$
$$A'\sin\vartheta + A''\cos\vartheta, \quad B'\sin\vartheta + B''\cos\vartheta, \quad C'\sin\vartheta + C''\cos\vartheta.$$

In den drei Ellipsen, welche den drei Wellen angehören, kann man nun immer leicht drei Radien angeben, welche gegen einander rechtwinklig sind; denn wenn man diese als erste conjugirte Durchmesser in die Bewegungsellipsen einführen will, so hat man nur ϑ, ϑ_1, ϑ_2 so zu bestimmen, dafs die drei Richtungen, deren Cosinus sich verhalten wie

$$A'\cos\vartheta - A''\sin\vartheta, \quad B'\cos\vartheta - B''\sin\vartheta, \quad C'\cos\vartheta - C''\sin\vartheta,$$
$$A_1'\cos\vartheta_1 - A_1''\sin\vartheta_1, \quad B_1'\cos\vartheta_1 - B_1''\sin\vartheta_1, \quad C_1'\cos\vartheta_1 - C_1''\sin\vartheta_1,$$
$$A_2'\cos\vartheta_2 - A_2''\sin\vartheta_2, \quad B_2'\cos\vartheta_2 - B_2''\sin\vartheta_2, \quad C_2'\cos\vartheta_2 - C_2''\sin\vartheta_2,$$

rechte Winkel einschliefsen. Bemerkt man aber, dafs die Gleichungen (16.) alsdann in die folgenden übergehn, welche die allgemeinen Beziehungen der Ellipsen gegen einander characterisiren:

$$(22.)\quad \begin{cases} (A_1'A_2' + B_1'B_2' + C_1'C_2') + (A_1''A_2'' + B_1''B_2'' + C_1''C_2'') = 0, \\ (A_2'A' + B_2'B' + C_2'C') + (A_2''A'' + B_2''B'' + C_2''C'') = 0, \\ (A'A_1' + B'B_1' + C'C_1') + (A''A_1'' + B''B_1'' + C''C_1'') = 0, \\ (A_1'A_2'' + B_1'B_2'' + C_1'C_2'') - (A_2'A_1'' + B_2'B_1'' + C_2'C_1'') = 0, \\ (A_2'A'' + B_2'B'' + C_2'C'') - (A'A_2'' + B'B_2'' + C'C_2'') = 0, \\ (A'A_1'' + B'B_1'' + C'C_1'') - (A_1'A'' + B_1'B'' + C_1'C'') = 0, \end{cases}$$

so erhält man für die ϑ die Gleichungen

$$\operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{A_1'A_2' + B_1'B_2' + C_1'C_2'}{A_1'A_2'' + B_1'B_2'' + C_1'C_2''},$$

$$\operatorname{tg}(\vartheta_2 + \vartheta) = \frac{A_2'A' + B_2'B' + C_2'C'}{A_2'A'' + B_2'B'' + C_2'C''},$$

$$\operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta_1) = \frac{A'A_1' + B'B_1' + C'C_1'}{A'A_1'' + B'B_1'' + C'C_1''},$$

welche offenbar unter allen Umständen neben einander bestehen können.

In den Gleichungen (18.) bezeichnen aber A', B', C' noch den Endpunkt eines ganz beliebigen Durchmessers, da es nur darauf ankommt die willkürliche Constante τ gehörig zu bestimmen, um bei gegebenen Werthen von A, B, C jeden beliebigen Durchmesser durch die Coordinaten A', B', C' darzustellen. Ich werde daher in dem Folgenden durch A', B', C', A_1', B_1', C_1', A_2', B_2', C_2' die Endpunkte dreier Durchmesser bezeichnen, welche gegen einander senkrecht gerichtet sind. Es bestehen daher jetzt die Gleichungen

$$(23.)\quad \begin{cases} A_1'A_2' + B_1'B_2' + C_1'C_2' = 0, \\ A_2'A' + B_2'B' + C_2'C' = 0, \\ A'A_1' + B'B_1' + C'C_1' = 0. \end{cases}$$

Aus (22.) folgen dann sogleich die andern:

$$(24.)\quad \begin{cases} A_1''A_2'' + B_1''B_2'' + C_1''C_2'' = 0, \\ A_2''A'' + B_2''B'' + C_2''C'' = 0, \\ A''A_1'' + B''B_1'' + C''C_1'' = 0. \end{cases}$$

Und so hat man den Satz:

Die Durchmesser der drei Ellipsen, welche zu drei gegen einander senkrechten conjugirt sind, sind wiederum gegen einander senkrecht.

Man kann daher jedes dieser beiden Systeme von Durchmessern als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems betrachten; und bezeichnet man die Coordinaten der Systeme durch u', v', w' und u'', v'', w'', so hat man zur Transformation derselben in das System u, v, w die Gleichungen:

$$(25.)\quad \begin{cases} p'u' = A'u + B'v + C'w, & p''u'' = A''u + B''v + C''w, \\ p_1'v' = A_1'u + B_1'v + C_1'w, & p_1''v'' = A_1''u + B_1''v + C_1''w, \\ p_2'w' = A_2'u + B_2'v + C_2'w, & p_2''w'' = A_2''u + B_2''v + C_2''w, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist

$$(26.)\quad p_i' = \sqrt{A_i'^2 + B_i'^2 + C_i'^2}, \qquad p_i'' = \sqrt{A_i''^2 + B_i''^2 + C_i''^2}.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (25.) aber erhält man dann die Formeln:

$$(27.)\quad \begin{cases} u = \frac{A'}{p'}u' + \frac{A_1'}{p_1'}v' + \frac{A_2'}{p_2'}w' = \frac{A''}{p''}u'' + \frac{A_1''}{p_1''}v'' + \frac{A_2''}{p_2''}w'', \\ v = \frac{B'}{p'}u' + \frac{B_1'}{p_1'}v' + \frac{B_2'}{p_2'}w' = \frac{B''}{p''}u'' + \frac{B_1''}{p_1''}v'' + \frac{B_2''}{p_2''}w'', \\ w = \frac{C'}{p'}u' + \frac{C_1'}{p_1'}v' + \frac{C_2'}{p_2'}w' = \frac{C''}{p''}u'' + \frac{C_1''}{p_1''}v'' + \frac{C_2''}{p_2''}w''. \end{cases}$$

Hieraus ist es leicht die Systeme u', v', w' und u'', v'', w'' durch einander auszudrücken. Setzt man den Gleichungen (22.) zufolge

$$(28.)\quad \begin{cases} A_1'A_2'' + B_1'B_2'' + C_1'C_2'' = A_2'A_1'' + B_2'B_1'' + C_2'C_1'' = b, \\ A_2'A'' + B_2'B'' + C_2'C'' = A'A_2'' + B'B_2'' + C'C_2'' = b_1, \\ A'A_1'' + B'B_1'' + C'C_1'' = A_1'A'' + B_1'B'' + C_1'C'' = b_2, \end{cases}$$

und ferner

$$(29.)\quad \begin{cases} A'A'' + B'B'' + C'C'' = a, \\ A_1'A_1'' + B_1'B_1'' + C_1'C_1'' = a_1, \\ A_2'A_2'' + B_2'B_2'' + C_2'C_2'' = a_2, \end{cases}$$

so erhält man durch Auflösung der Formeln (27.) nach u', v', w' oder nach u'', v'', w'':

$$(30.)\quad \begin{cases} p'u' = \frac{au''}{p''} + \frac{b_2v''}{p_1''} + \frac{b_1w''}{p_2''}, & p''u'' = \frac{au'}{p'} + \frac{b_2v'}{p_1'} + \frac{b_1w'}{p_2'}, \\ p_1'v' = \frac{b_2u''}{p''} + \frac{a_1v''}{p_1''} + \frac{bw''}{p_2''}, & p_1''v'' = \frac{b_2u'}{p'} + \frac{a_1v'}{p_1'} + \frac{bw'}{p_2'}, \\ p_2'w' = \frac{b_1u''}{p''} + \frac{bv''}{p_1''} + \frac{a_2w''}{p_2''}, & p_2''w'' = \frac{b_1u'}{p'} + \frac{bv'}{p_1'} + \frac{a_2w'}{p_2'}. \end{cases}$$

Diese Formeln unterscheiden sich von einander nur dadurch, dafs in dem einen System p', p_1', p_2', wo in dem andern p'', p_1'', p_2'' auftreten. Bildet

man nun die bekannten Gleichungen, welche die Systeme als rechtwinklig characterisiren, so finden sich für die Verhältnisse der p'^2 dieselben Gleichungen, wie für die der p''^2, und man hat daher

$$p'^2 : p_1'^2 : p_2'^2 = p''^2 : p_1''^2 : p_2''^2,$$

oder da die p nothwendig positiv sind,

$$p' : p_1' : p_2' = p'' : p_1'' : p_2'',$$

so dafs man setzen kann

$$(31.) \qquad p_i' = r' p_i, \qquad p_i'' = r'' p_i.$$

Da aber die p' etc. nichts anderes sind als die Längen der conjugirten Halbmesser, so folgt hieraus der Satz:

In jeder der Ellipsen stehen die Längen der gedachten beiden Durchmesser in demselben Verhältnifs zu einander.

Die u', v', w' werden aber dann mit den u'', v'', w'' durch das auch umgekehrt geltende System verbunden:

$$(32.) \quad \begin{cases} r'r''.u' = \dfrac{au''}{p^2} + \dfrac{b_2 v''}{pp_1} + \dfrac{b_1 w''}{pp_2}, \\ r'r''.v' = \dfrac{b_2 u''}{pp_1} + \dfrac{a_1 v''}{p_1^2} + \dfrac{bw''}{p_1 p_2}, \\ r'r''.w' = \dfrac{b_1 u''}{pp_2} + \dfrac{bv''}{p_1 p_2} + \dfrac{a_2 w''}{p_2^2}. \end{cases}$$

Bildet man nun die bekannten Gleichungen der Orthogonalität, so erhält man:

$$\frac{a^2}{p^2} + \frac{b_2^2}{p_1^2} + \frac{b_1^2}{p_2^2} = r'^2 r''^2 p^2, \qquad \frac{b_1 b_2}{p^2} + \frac{b a_1}{p_1^2} + \frac{b a_2}{p_2^2} = 0,$$

$$\frac{b_2^2}{p^2} + \frac{a_1^2}{p_1^2} + \frac{b^2}{p_2^2} = r'^2 r''^2 p_1^2, \qquad \frac{b_1 a}{p^2} + \frac{b_2 b}{p_1^2} + \frac{b_1 a_2}{p_2^2} = 0,$$

$$\frac{b_1^2}{p^2} + \frac{b^2}{p_1^2} + \frac{a_2^2}{p_2^2} = r'^2 r''^2 p_2^2, \qquad \frac{b_2 a}{p^2} + \frac{b_2 a_1}{p_1^2} + \frac{b b_1}{p_2^2} = 0.$$

Die letzten Gleichungen erlauben a, a_1, a_2 durch die Gröfsen b, p auszudrücken, und geben dann

$$(33.) \quad \begin{cases} a = \dfrac{b_1 b_2}{b} - \mu p^2, \quad a_1 = \dfrac{b b_2}{b_1} - \mu p_1^2, \quad a_2 = \dfrac{b_1 b}{b_2} - \mu p_2^2, \quad \text{wo} \\ 2\mu = \dfrac{b_1 b_2}{b p^2} + \dfrac{b_2 b}{b_1 p_1^2} + \dfrac{b b_1}{b_2 p_2^2} = b b_1 b_2 \left(\dfrac{1}{b^2 p^2} + \dfrac{1}{b_1^2 p_1^2} + \dfrac{1}{b_2^2 p_2^2} \right); \end{cases}$$

und wodurch die ersten Gleichungen übergehen in:

$$(34.) \qquad r'^2 r''^2 = \mu^2, \quad \text{oder} \quad r' r'' = \pm \mu.$$

Es ist hier nur nöthig das ***untere*** Zeichen zu beachten, da man immer dafür sorgen kann, dafs μ selbst oder das Product bb_1b_2 negativ ist. Wenn das Product positiv ist, so braucht man nur alle A_i', B_i', C_i' mit $-A_i''$, $-B_i''$, $-C_i''$, und die A_i'', B_i'', C_i'' mit A_i', B_i', C_i' zu vertauschen, was erreicht wird, indem man in (18.) τ_i in $\tau_i + \frac{\lambda}{2m_i}$ übergehen läfst, und wodurch die b nur ihre Vorzeichen, nicht aber ihren absoluten Werth verändern. Es bedeutet dies nichts anderes, als dafs man in jeder Ellipse statt des einen conjugirten Halbmessers den andern, statt dieses aber die Verlängerung des ersten einführt.

Dies vorausgeschickt, nehmen mit Hülfe der Gleichungen (33.), (34.) die Transformationsgleichungen (32.) die Gestalt an:

$$(35.)\quad \begin{cases} u''-u' = \frac{b_1b_2}{\mu p}\Theta'' = -\frac{b_1b_2}{\mu p}\Theta', \\ v''-v' = \frac{b_2b}{\mu p_1}\Theta'' = -\frac{b_2b}{\mu p_1}\Theta', \\ w''-w' = \frac{bb_1}{\mu p_2}\Theta'' = -\frac{bb_1}{\mu p_2}\Theta', \\ \text{wo noch} \qquad \Theta'+\Theta''=0. \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Theta'' &= \frac{u''}{pb}+\frac{v''}{p_1b_1}+\frac{w''}{p_2b_2}, \\ \Theta' &= \frac{u'}{pb}+\frac{v'}{p_1b_1}+\frac{w'}{p_2b_2}, \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs ein und dieselbe Ebene $\Theta'=0$ oder $\Theta''=0$ die Winkel der drei Durchmesserpaare halbirt und senkrecht ist gegen die Ebenen der drei Ellipsen; da für alle Punkte dieser Ebene

$$u'=u'', \quad v'=v'', \quad w'=w''.$$

Die drei Bewegungsebenen schneiden sich daher in einer geraden Linie, welche auf dieser Ebene senkrecht steht; und die beiden Systeme rechtwinkliger Durchmesser sind in Bezug auf diese Ebene Spiegelbilder von einander.

Ein letztes Gesetz erhält man, indem man aus (33.) die Combination bildet:

$$\frac{a}{p^2}+\frac{a_1}{p_1^2}+\frac{a_2}{p_2^2} = -\mu = r'r''.$$

Es ist nämlich

$$\frac{a_i}{p_i^2 r'r''} = \frac{A_i'A_i''+B_i'B_i''+C_i'C_i''}{\sqrt{A_i'^2+B_i'^2+C_i'^2}\sqrt{A_i''^2+B_i''^2+C_i''^2}}$$

nichts anderes als der Cosinus des Winkels, welchen die beiden conjugirten Durchmesser einer Ellipse gegen einander bilden. Bezeichnet man daher durch ε, ε_1, ε_2 diese Winkel für die drei Ellipsen, so ist

$$(36.)\qquad \cos\varepsilon+\cos\varepsilon_1+\cos\varepsilon_2 = 1.$$

Die Summe der Cosinus der Winkel, welche die in Rede stehenden Durchmesser in den drei Ellipsen gegen einander bilden, ist Eins.

§. 5.

Isotrope Medien.

Die Gleichungen (4.) gestatten eine vollständige Discussion nur dann, wenn das Medium isotrop ist. In diesem Falle dürfen die Grundfunctionen μ, K, H ihre Werthe nicht verändern, wie auch das Coordinatensystem gedreht werde; d. h. die in ihnen vorkommenden Summen dürfen nur von der Verbindung

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

abhängig sein. Da aufserdem nach (5.) bei einer Entwickelung nach fallenden Potenzen von λ offenbar μ, H, K sämmtlich mit der 0ten Potenz von λ, und bezüglich mit der 0ten, 2ten, 1ten von $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ beginnen müssen, so kann man setzen

$$\begin{aligned}
\mu &= \mu_0 + \frac{\mu_1}{\lambda^2} + \frac{\mu_2}{\lambda^4} + \cdots,\\
H &= h_0\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}{4} + h_1\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3}{6\lambda^2} + h_2\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^4}{8\lambda^4} + \cdots,\\
K &= \lambda\left\{k_0\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2} + k_1\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}{4\lambda^2} + k_2\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3}{6\lambda^4} + \cdots\right\}.
\end{aligned}$$

Und demnach wird in Folge der Gleichungen (6.):

$$(37.)\qquad \begin{cases} c_{11} = h+\alpha^2 h', & c_{23} = \beta\gamma h', & c_1 = \alpha k,\\ c_{22} = h+\beta^2 h', & c_{31} = \gamma\alpha h', & c = \beta k,\\ c_{33} = h+\gamma^2 h', & c_{12} = \alpha\beta h', & c_3 = \gamma k, \end{cases}$$

wo die Constanten h, h', k die Bedeutung haben:

$$(38.)\qquad \begin{cases} h = h_0 + \frac{h_1}{\lambda^2} + \frac{h_2}{\lambda^4} + \cdots,\\ h' = 2h_0 + 4\frac{h_1}{\lambda^2} + 6\frac{h_2}{\lambda^4} + \cdots,\\ k = \lambda\left(k_0 + \frac{k_1}{\lambda^2} + \frac{k_2}{\lambda^4} + \cdots\right). \end{cases}$$

Durch Einführung dieser Bezeichnungen gehen die Gleichungen (4.) in die folgenden über:

$$(39.)\quad \begin{cases} A(m^2+\mu-h) = \alpha h'(\alpha A+\beta B+\gamma C)+k(\beta C-\gamma B)\sqrt{-1}, \\ B(m^2+\mu-h) = \beta h'(\alpha A+\beta B+\gamma C)+k(\gamma A-\alpha C)\sqrt{-1}, \\ C(m^2+\mu-h) = \gamma h'(\alpha A+\beta B+\gamma C)+k(\alpha B-\beta A)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Um die cubische Gleichung zu bilden, deren Wurzeln die mit m^2 bezeichneten Gröfsen werden, hat man nach (10.) die Functionen zu bilden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 h'-m^2-\mu+h, & \alpha\beta h', & \alpha\gamma h' \\ \alpha\beta h', & \beta^2 h'-m^2-\mu+h, & \beta\gamma h' \\ \alpha\gamma h', & \beta\gamma h', & \gamma^2 h'-m^2-\mu+h \end{vmatrix} = (h-\mu-m^2)^2(h+h'-\mu-m^2),$$

$$\Delta = k^2[\alpha^2(\alpha^2 h'-m^2-\mu+h)+\beta^2(\beta^2 h'-m^2-\mu+h)+\gamma^2(\gamma^2 h'-m^2-\mu+h) + 2\alpha^2\beta^2 h'+2\beta^2\gamma^2 h'+2\gamma^2\alpha^2 h'] = k^2(h'+h-\mu-m^2);$$

und die Gleichung (10.) löst sich daher in die Factoren auf:

$$(40.)\quad \begin{cases} m^2 = h+h'-\mu, \\ m^2 = h-\mu+k, \\ m^2 = h-\mu-k. \end{cases}$$

Für die erste dieser Gleichungen gehen dann die Gleichungen (39.) über in

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}.$$

In dieser Welle sind daher die Schwingungen geradlinig und longitudinal; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in derselben ist unabhängig von den Constanten der Circularpolarisation, und reducirt sich auf einen constanten Term, welchem andere folgen, die den geraden Potenzen der reciproken Wellenlänge proportional sind.

Für die zweite und dritte Welle aber werden diese Gleichungen:

$$(41.)\quad \begin{cases} \pm kA = \alpha h'(\alpha A+\beta B+\gamma C)+k(\beta C-\gamma B)\sqrt{-1}, \\ \pm kB = \beta h'(\alpha A+\beta B+\gamma C)+k(\gamma A-\alpha C)\sqrt{-1}, \\ \pm kC = \gamma h'(\alpha A+\beta B+\gamma C)+k(\alpha B-\beta A)\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Multiplicirt man hier die erste mit α, die zweite mit β, die dritte mit γ und addirt, so kommt

$$(42.)\quad \alpha A+\beta B+\gamma C = 0;$$

oder, wenn man die A, B, C in der Form (17^a.) darstellt:

$$\alpha A'+\beta B'+\gamma C' = 0, \quad \alpha A''+\beta B''+\gamma C'' = 0.$$

Die Bewegungscurven liegen also in der Wellenebene; die Schwingungen sind transversal. Benutzt man aber die Gleichung (42.) und summirt die Quadrate

der Gleichungen (41.), so kommt

$$A^2+B^2+C^2=0,$$

was sich auflöst in

$$A'A''+B'B''+C'C''=0, \quad A'^2+B'^2+C'^2=A''^2+B''^2+C''^2.$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, dafs zwei conjugirte Durchmesser der Bewegungscurve gleich grofs sind und sich senkrecht durchschneiden. Die Bewegungscurven sind daher ***Kreise.***

Nennt man m_1, m_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten dieser Wellen, so findet sich

$$\frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2+m_2^2}=\frac{k}{h-\mu}.$$

Hier beginnt der Zähler mit der ersten Potenz von λ, und es folgen die ungeraden negativen Potenzen; der Nenner aber beginnt mit einer reinen Constanten, auf welche gerade negative Potenzen von λ folgen. Sind die Constanten des Zählers klein, so kann man in dieser Formel die m zum Theil durch den Mittelwerth

$$m=\sqrt{h-\mu}=\sqrt{h_0-\mu_0}\ldots$$

ersetzen, und hat dann:

$$\frac{m_1-m_2}{m}=\frac{k_0\lambda+k_1\lambda^{-1}}{h_0-\mu_0}+\cdots$$

Diese Resultate sind aus einem andern Gesichtspunkte schon von *Cauchy* im 15ten Bande der *Comptes rendus* pag. 1076 ff. entwickelt worden. Dieselben sind hier vorangeschickt, da die Resultate für krystallinische Medien sich in erster Annäherung immer auf diese zurückführen lassen.

§. 6.

Zweiaxige Medien. Zerlegung der cubischen Gleichung.

Ich gehe zu dem Fall über, wo sich durch jeden Punkt drei gegen einander senkrechte Ebenen legen lassen, gegen welche die angrenzenden Molecüle symmetrisch vertheilt sind. Alsdann können die Grundfunctionen μ, H, k keine ungeraden Potenzen von α, β, γ enthalten. Indem man aber zugleich die höhern Potenzen der reciproken Wellenlänge vernachlässigt, und jedesmal nur die niedrigste beibehält, wird

$$(43.)\quad \begin{cases} \mu = a_1\alpha^2+a_2\beta^2+a_3\gamma^2, \\ k = \frac{1}{2}(k_1\alpha^2+k_2\beta^2+k_3\gamma^2), \\ H = \frac{1}{4}(a_{11}\alpha^4+a_{22}\beta^4+a_{33}\gamma^4+2a_{23}\beta^2\gamma^2+2a_{31}\gamma^2\alpha^2+2a_{12}\alpha^2\beta^2). \end{cases}$$

Hier sind die a reine Constanten, während die k der Wellenlänge proportional werden. Wenn man diese Werthe nun zur Bildung der c zu Grunde legt, so erhält man

$$(44.)\quad \begin{cases} c_{11} = 3\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13}, & c_{23} = 2\beta\gamma a_{23}, & c_1 = \alpha k_1, \\ c_{22} = \alpha^2 a_{12} + 3\beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23}, & c_{31} = 2\gamma\alpha a_{31}, & c_2 = \beta k_2, \\ c_{33} = \alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + 3\gamma^2 a_{33}, & c_{12} = 2\alpha\beta a_{12}, & c_3 = \gamma k_3, \end{cases}$$

und die Gleichungen (4.) nehmen die Gestalt an:

$$(45.)\quad \begin{cases} 0 = \boldsymbol{A}(\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13} - m^2 - \mu) + 2\alpha(\alpha \boldsymbol{A} a_{11} + \beta \boldsymbol{B} a_{12} + \gamma \boldsymbol{C} a_{13}) \\ \qquad\qquad + \sqrt{-1}(\beta k_2 \boldsymbol{C} - \gamma k_3 \boldsymbol{B}), \\ 0 = \boldsymbol{B}(\alpha^2 a_{12} + \beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23} - m^2 - \mu) + 2\beta(\alpha \boldsymbol{A} a_{12} + \beta \boldsymbol{B} a_{22} + \gamma \boldsymbol{C} a_{23}) \\ \qquad\qquad + \sqrt{-1}(\gamma k_3 \boldsymbol{A} - \alpha k_1 \boldsymbol{C}), \\ 0 = \boldsymbol{C}(\alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + \gamma^2 a_{33} - m^2 - \mu) + 2\gamma(\alpha \boldsymbol{A} a_{13} + \beta \boldsymbol{B} a_{23} + \gamma \boldsymbol{C} a_{33}) \\ \qquad\qquad + \sqrt{-1}(\alpha k_1 \boldsymbol{B} - \beta k_2 \boldsymbol{A}). \end{cases}$$

Da aber in der Natur alle krystallinischen Medien sich nur sehr wenig von unkrystallinischen unterscheiden, so darf man in diesen Gleichungen annehmen, dafs die a_{11}, a_{12}, etc. sich von einem Mittelwerth a wenig entfernen, so dafs die Differenzen $a_{11} - a_{12}$, etc. gegen die Gröfse a sehr klein sind. Dasselbe von den Coefficienten k vorauszusetzen, scheint vorläufig darum mifslich, weil diese Coefficienten selbst sehr klein sein werden, nämlich von der Ordnung der oben gedachten Differenzen. Doch führen die folgenden Betrachtungen darauf, auch die Differenzen der k als klein gegen den mittleren Werth derselben anzunehmen.

Es kommt zunächst darauf an, die cubische Gleichung für m^2 zu entwickeln, welche die Wellenfläche darstellt, d. h. die Fläche, deren Radien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der gegen sie senkrechten Wellen darstellen. Zu diesem Zweck sind die Functionen Δ und Δ zu bilden. Es hat Δ den Ausdruck:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13} - m^2 - \mu, & 2\alpha\beta a_{12}, & 2\alpha\gamma a_{13} \\ 2\alpha\beta a_{12}, & \alpha^2 a_{12} + 3\beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23} - m^2 - \mu, & 2\beta\gamma a_{23} \\ 2\alpha\gamma a_{13}, & 2\beta\gamma a_{23}, & \alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + 3\gamma^2 a_{33} - m^2 - \mu \end{vmatrix}.$$

Die Untersuchungen von *Cauchy* und *Neumann* haben gezeigt, dafs dieser Ausdruck unter gewissen Annahmen in *einen* Factor zerfällt, welcher für m^2, α^2, β^2, γ^2 vom ersten, und einen *andern*, welcher vom zweiten Grade

ist, und von denen der letztere in der Theorie der geradlinigen Polarisation die *Fresnel*sche Wellenfläche darstellt, während der erste für die Lichterscheinungen ohne Bedeutung ist. Nimmt man, da sich ein solcher Factor absondern lassen mufs, und derselbe nur linear in α^2, β^2, γ^2 sein kann, denselben in der Gestalt an

$$F = p_1\alpha^2 + p_2\beta^2 + p_3\gamma^2 - m^2 - \mu;$$

so mufs also Δ verschwinden, wenn man diesen Factor gleich Null setzt, d. h. wenn

$$m^2 + \mu = p_1\alpha^2 + p_2\beta^2 + p_3\gamma^2.$$

Führt man dies in dem Ausdruck von Δ ein, und läfst zunächst die Coefficienten von α^6, β^6, γ^6 verschwinden, so kommt

$$\begin{aligned}(3a_{11} - p_1)(a_{12} - p_1)(a_{13} - p_1) &= 0,\\ (3a_{22} - p_2)(a_{23} - p_2)(a_{21} - p_2) &= 0,\\ (3a_{33} - p_3)(a_{31} - p_3)(a_{32} - p_3) &= 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind symmetrisch erfüllbar nur durch die Annahme:

$$p_1 = 3a_{11}, \qquad p_2 = 3a_{22}, \qquad p_3 = 3a_{33}.$$

Daher ist der abzusondernde Factor F nothwendig

$$(46.) \qquad F = 3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) - m^2 - \mu.$$

Führt man diese Werthe der p in Δ ein, und läfst die Coefficienten von $\alpha^4\beta^2$, etc. verschwinden, so erhält man drei Bedingungen, welchen die a genügen müssen, nämlich

$$(47.) \qquad \begin{cases}(3a_{22} - a_{23})(3a_{33} - a_{23}) = 4a_{23}^2,\\ (3a_{33} - a_{31})(3a_{11} - a_{31}) = 4a_{31}^2,\\ (3a_{11} - a_{12})(3a_{22} - a_{12}) = 4a_{12}^2;\end{cases}$$

und indem endlich noch der Coefficient von $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ verschwinden mufs, erhält man die letzte Bedingung:

$$\begin{aligned}(48.) \qquad 0 = {} & (3a_{11} - a_{12})(3a_{22} - a_{23})(3a_{33} - a_{31})\\ & + (3a_{11} - a_{13})(3a_{22} - a_{21})(3a_{33} - a_{32}) - 16a_{12}a_{23}a_{31}.\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dafs diese vier Gleichungen nicht streng neben einander bestehen können. Denn in Folge der ersten Gleichungen kann man setzen

$$(49.) \qquad \begin{cases}3a_{22} - a_{23} = 2a_{23}e^{\varepsilon_1}, & 3a_{33} - a_{23} = 2a_{23}e^{-\varepsilon_1},\\ 3a_{33} - a_{31} = 2a_{31}e^{\varepsilon_2}, & 3a_{11} - a_{31} = 2a_{31}e^{-\varepsilon_2},\\ 3a_{11} - a_{12} = 2a_{12}e^{\varepsilon_3}, & 3a_{22} - a_{12} = 2a_{12}e^{-\varepsilon_3},\end{cases}$$

wo die ε sehr kleine Gröfsen bedeuten, welche für isotrope Medien verschwinden. Durch Elimination von a_{11}, etc. erhält man hieraus

$$(50.)\quad (1+2e^{\varepsilon_1})(1+2e^{\varepsilon_2})(1+2e^{\varepsilon_3}) = (1+2e^{-\varepsilon_1})(1+2e^{-\varepsilon_2})(1+2e^{-\varepsilon_3}).$$

Aber zugleich geht (48.) über in

$$(51.)\quad \begin{cases} e^{(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)} + e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)} - 2 = 0, & \text{oder} \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0; \end{cases}$$

wodurch die Gleichung (50.) die Gestalt annimmt

$$(1-e^{\varepsilon_1})(1-e^{\varepsilon_2})(1-e^{\varepsilon_3}) = 0.$$

Es müfste daher eines der ε verschwinden, wodurch das Medium in Bezug auf eine Axe isotrop würde. Dagegen kann man dieselbe als erfüllt ansehen, wenn man überall die Quadrate der Differenzen $a_{11}-a_{12}$, etc. vernachlässigt, wodurch man aus (47.) die Beziehungen erhält:

$$(52.)\quad \begin{cases} a_{22}+a_{33} = 2a_{23} \\ a_{33}+a_{11} = 2a_{31} \\ a_{11}+a_{22} = 2a_{12} \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} a_{11} = a_{12}+a_{13}-a_{23}, \\ a_{22} = a_{23}+a_{21}-a_{31}, \\ a_{33} = a_{31}+a_{32}-a_{12}, \end{cases}$$

und wodurch (48.) bis auf Gröfsen höherer Ordnung erfüllt ist. Eine kleine Rechnung ergiebt dann für Δ die Form:

$$(53.)\quad \Delta = [3(a_{11}\alpha^2+a_{22}\beta^2+a_{33}\gamma^2)-m^2-\mu]$$
$$\times[(m^2+\mu)^2-(m^2+\mu)\{(a_{12}+a_{13})\alpha^2+(a_{23}+a_{21})\beta^2+(a_{31}+a_{32})\gamma^2\}$$
$$+a_{12}a_{13}\alpha^2+a_{21}a_{23}\beta^2+a_{31}a_{32}\gamma^2].$$

Damit dieser letzte Factor, gleich Null gesetzt, die *Fresnel*sche Wellenfläche darstelle, mufs er die Form annehmen:

$$(54.)\quad (m^2-b^2)(m^2-c^2)\alpha^2+(m^2-c^2)(m^2-a^2)\beta^2+(m^2-a^2)(m^2-b^2)\gamma^2;$$

und damit dies möglich sei, mufs der fragliche Factor vor allem für α^2, β^2, γ^2 linear werden; oder in demjenigen Theile desselben, welcher die Quadrate dieser Gröfsen enthält, nämlich

$$\mu[\mu-(a_{12}+a_{13})\alpha^2-(a_{23}+a_{21})\beta^2-(a_{31}+a_{32})\gamma^2]$$

mufs einer seiner beiden Factoren die Gestalt $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ annehmen. Hiernach mufs also entweder

$$a_1 = a_2 = a_3$$

sein, oder

$$a_1-a_{12}-a_{13} = a_2-a_{23}-a_{21} = a_3-a_{31}-a_{32}.$$

Diese beiden Hypothesen führen zu ganz verschiedenen Folgerungen und müssen neben einander behandelt werden.

1. Ist $a_1 = a_2 = a_3 = f$, so nimmt der zweite Factor von Δ die Gestalt (54.) an, wenn man setzt

$$(55.) \qquad a^2 = a_{23} - f, \quad b^2 = a_{31} - f, \quad c^2 = a_{12} - f.$$

Diese Hypothese will ich im Folgenden kurz die ***Neumann***sche nennen, da sie in ihren Folgerungen auf die von ***Neumann*** festgehaltene Ansicht von der Lage der Schwingungsrichtung eines polarisirten Strahls führt; obwohl bei ***Neumann*** selbst (***Poggendorff***s Annalen, Band 25) die Gröfsen a_1, a_2, a_3 sämmtlich gleich Null gesetzt sind, wodurch die dort abgeleiteten Gleichungen keine vollkommene Allgemeinheit haben.

2. Ist

$$a_1 - a_{12} - a_{13} = a_2 - a_{23} - a_{21} = a_3 - a_{31} - a_{32} = -g,$$

so mufs man, um die Form (54.) zu erhalten, setzen:

$$(56.) \qquad a^2 = g - a_{23}, \quad b^2 = g - a_{31}, \quad c^2 = g - a_{12},$$

und diese Hypothese soll die ***Fresnel***sche genannt werden, da sie auf dieselbe Ansicht über die Schwingungsrichtung führt, welche ***Fresnel*** angegeben hat.

Ich wende mich jetzt zu dem Ausdruck Δ, um zu zeigen, dafs auch in diesem der Factor

$$3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) - m^2 - \mu$$

sich absondern läfst, sobald man für die k gewisse Bedingungen annimmt. Der Ausdruck Δ hat die Gestalt:

$$\Delta = \begin{cases} (3\alpha^2 a_{11} + \beta^2 a_{12} + \gamma^2 a_{13} - m^2 - \mu) k_1^2 \alpha^2 + 4\beta^2\gamma^2 k_2 k_3 a_{23} \\ +(\alpha^2 a_{12} + 3\beta^2 a_{22} + \gamma^2 a_{23} - m^2 - \mu) k_2^2 \beta^2 + 4\gamma^2\alpha^2 k_3 k_1 a_{31} \\ +(\alpha^2 a_{13} + \beta^2 a_{23} + 3\gamma^2 a_{33} - m^2 - \mu) k_3^2 \gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2 k_1 k_2 a_{12}. \end{cases}$$

Der blofse Anblick dieser Formel lehrt, dafs, wenn sich jener Factor absondern lassen soll, Δ nur übergehen kann in

$$(57.) \qquad \Delta = (k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2 + k_3^2\gamma^2)[3(a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2) - m^2 - \mu].$$

Die Vergleichung der Coefficienten in beiden Formeln führt dann auf die Bedingungen:

$$\begin{aligned} k_2^2(3a_{33} - a_{23}) + k_3^2(3a_{22} - a_{23}) &= 4k_2 k_3 a_{23}, \\ k_3^2(3a_{11} - a_{31}) + k_1^2(3a_{33} - a_{31}) &= 4k_3 k_1 a_{31}, \\ k_1^2(3a_{22} - a_{12}) + k_2^2(3a_{11} - a_{12}) &= 4k_1 k_2 a_{12}. \end{aligned}$$

Führt man hier die Werthe (52.) für a_{11}, a_{22}, a_{33} ein, so kommt

$$3(k_2+k_3)(a_{12}-a_{13}) = a_{23}(k_2-k_3),$$
$$3(k_3+k_1)(a_{23}-a_{21}) = a_{31}(k_3-k_1),$$
$$3(k_1+k_2)(a_{31}-a_{32}) = a_{12}(k_1-k_2).$$

Man erkennt hieraus zunächst, was oben schon angedeutet wurde, dafs die Differenzen der k gegen die absoluten Werthe derselben in demselben Verhältnifs stehen wie die Differenzen der a gegen ihre absoluten Werthe. Und bezeichnet man ferner durch k, a Mittelwerthe, so erhält man mit Vernachlässigung höherer Potenzen der Differenzen:

$$k_2-k_3 = \frac{6k}{a}(a_{12}-a_{13}),$$
$$k_3-k_1 = \frac{6k}{a}(a_{23}-a_{21}),$$
$$k_1-k_2 = \frac{6k}{a}(a_{31}-a_{32}),$$

Gleichungen, welche offenbar mit einander verträglich sind.

Indem man daher diese Gleichungen bestehen läfst, und also Δ in der Form (57.) darstellt, zerfällt die cubische Gleichung für m^2 in die folgenden beiden Factoren:

$$(58.)\quad \begin{cases} 3(a_{11}\alpha^2+a_{22}\beta^2+a_{33}\gamma^2) = m^2+\mu, \\ (m^2-b^2)(m^2-c^2)\alpha^2+(m^2-c^2)(m^2-a^2)\beta^2+(m^2-a^2)(m^2-b^2)\gamma^2 \\ \qquad = k_1^2\alpha^2+k_2^2\beta^2+k_3^2\gamma^2. \end{cases}$$

Und da ferner diese Zerlegung überhaupt nur bis auf Gröfsen höherer Ordnung richtig ist, und die k ohnedies stets von der Ordnung der Differenzen a^2-b^2, etc. sein werden, so kann man auf der rechten Seite ohne gleichberechtigte Gröfsen zu vernachlässigen, statt k_1^2, k_2^2, k_3^2 einen Mittelwerth k^2 einführen, wodurch der zweite Factor der cubischen Gleichung auf die einfachere Gestalt zurückkommt:

$$(59.)\quad (m^2-b^2)(m^2-c^2)\alpha^2+(m^2-c^2)(m^2-a^2)\beta^2+(m^2-a^2)(m^2-b^2)\gamma^2 = k^2.$$

§. 7.

Schwingungscurven in den drei Wellen.

Wenn man in die Gleichungen (45.) denjenigen Werth von $m^2+\mu$ einführt, welchen die erste Gleichung (58.) liefert, so wird keiner der Coefficienten von A, B, C von der Ordnung der Differenzen a^2-b^2, etc. Man

ist daher berechtigt, annäherungsweise die Gröfsen a, k durch Mittelwerthe zu ersetzen, und die Gleichungen gehen dann über in:

$$\begin{aligned} 2Aa &= 2\alpha a(\alpha A+\beta B+\gamma C)+\sqrt{-1}.k(\beta C-\gamma B),\\ 2Ba &= 2\beta a(\alpha A+\beta B+\gamma C)+\sqrt{-1}.k(\gamma A-\alpha C),\\ 2Ca &= 2\gamma a(\alpha A+\beta B+\gamma C)+\sqrt{-1}.k(\alpha B-\beta A), \end{aligned}$$

was offenbar ersetzt werden kann durch

$$(60.)\qquad \frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}.$$

Man ist daher berechtigt die imaginären Theile der A gleich Null zu setzen, während die reellen sich verhalten wie $\alpha:\beta:\gamma$. ***In dieser Welle sind daher die Schwingungen nahezu geradlinig und longitudinal,*** und die Constanten der Circularpolarisation üben auf dieselbe fast gar keinen Einflufs aus.

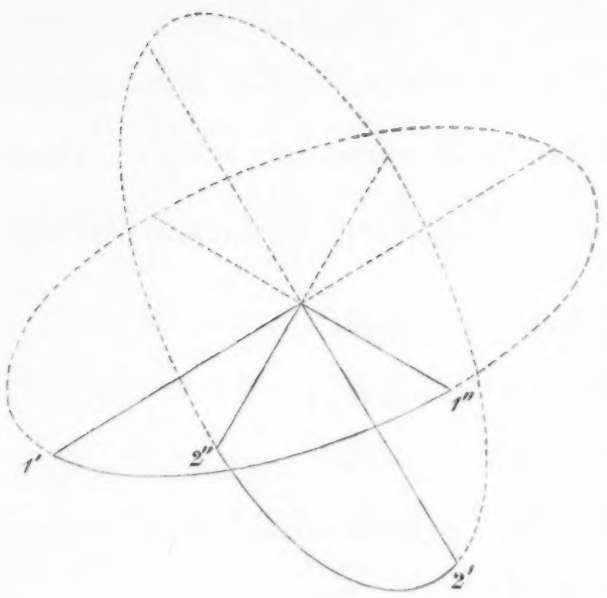
Da also für diese Welle $A''=B''=C''=0$, so geben die Fundamentalgleichungen (22.) für die andern beiden Wellen die Beziehungen:

$$(61.)\qquad \begin{cases} A_1'\alpha+B_1'\beta+C_1'\gamma=0, & A_2'\alpha+B_2'\beta+C_2'\gamma=0,\\ A_1''\alpha+B_1''\beta+C_1''\gamma=0, & A_2''\alpha+B_2''\beta+C_2''\gamma=0. \end{cases}$$

Die Radien der andern Bewegungsellipsen sind also nahezu in der Wellenebene enthalten, daher die Bewegungen in den beiden andern Wellen nahezu transversal.

Durch Anwendung der im §. 4 bewiesenen allgemeinen Sätze kann man sich eine genauere Vorstellung über die Lage dieser Ellipse bilden. Man hatte dort zwei Systeme von conjugirten Durchmessern zu suchen, deren jedes orthogonal war. Dies kann hier offenbar nicht anders geschehen, als wenn zwei der Durchmesser jedes Systems in der Wellenebene liegen, während die andern in die Normale derselben fallen. Geht man aber auf die Gleichung (36.) zurück, so findet man, dafs die beiden nach der Normale gerichteten Halbmesser auf ein und derselben Seite der Wellenebene liegen müssen. Wäre dies nicht der Fall, so wäre der von ihnen eingeschlossene Winkel ε gleich 180^0, also $\cos\varepsilon=-1$, mithin nach (36.) nothwendig auch $\cos\varepsilon_1=1$, $\cos\varepsilon_2=1$. Dies würde also auf den Fall führen, wo alle drei Wellen geradlinige Polarisation zeigen, was hier, wie man leicht sieht, nicht geschehen kann. Es mufs also $\cos\varepsilon=1$ sein, daher

$$\cos\varepsilon_1+\cos\varepsilon_2=0.$$



Die conjugirten Durchmesser beider Ellipsen stehen somit nicht nur in demselben Verhältnifs zu einander, sondern schliefsen auch Nebenwinkel ein; woraus sogleich folgt, ***dafs die Ellipsen in beiden Wellen einander ähnlich sind.*** Auch sieht man aus der Figur (in welcher aufserdem der Einfachheit wegen auch die ***Dimensionen*** der Ellipsen gleich angenommen sind), ***dafs die eine Ellipse gegen die andre um einen rechten Winkel gedreht erscheint*** *).

Da hiedurch das gegenseitige Verhalten beider Ellipsen bestimmt ist, so bleibt nur noch übrig, die Formeln für dieselben aufzustellen. Hier scheiden sich die beiden Hypothesen; es sollen zuerst die Folgerungen der ***Fresnel***schen entwickelt werden.

Für die Transversalwellen ist es nicht mehr erlaubt, die Gröfsen a durch Mittelwerthe zu ersetzen, weil die in (45.) übrigbleibenden Terme

$$a - m^2 - \mu, \qquad \alpha A + \beta B + \gamma C$$

selbst von der Ordnung der Differenzen $a^2 - b^2$, etc. werden. Dagegen darf man die k_1, etc. auf den Mittelwerth k reduciren. Benutzt man sodann die Gleichungen (52.), (56.), so erhält man leicht

$$a_{11}\alpha^2 + a_{12}\beta^2 + a_{13}\gamma^2 - m^2 - \mu = a^2 - m^2,$$
$$a_{12}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{23}\gamma^2 - m^2 - \mu = b^2 - m^2,$$
$$a_{13}\alpha^2 + a_{23}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 - m^2 - \mu = c^2 - m^2,$$

$$a_{11}\alpha A + a_{12}\beta B + a_{13}\gamma C$$
$$= (g - a^2 - b^2 - c^2)(\alpha A + \beta B + \gamma C) + (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) + a^2(\alpha A + \beta B + \gamma C),$$
$$a_{12}\alpha A + a_{22}\beta B + a_{23}\gamma C$$
$$= (g - a^2 - b^2 - c^2)(\alpha A + \beta B + \gamma C) + (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) + b^2(\alpha A + \beta B + \gamma C),$$
$$a_{13}\alpha A + a_{23}\beta B + a_{33}\gamma C$$
$$= (g - a^2 - b^2 - c^2)(\alpha A + \beta B + \gamma C) + (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) + c^2(\alpha A + \beta B + \gamma C).$$

Die letzten drei Ausdrücke unterscheiden sich nur durch die letzten Terme;

---

*) In der Figur sind durch $1'$, $2'$, $1''$, $2''$ diejenigen Punkte bezeichnet, welche beziehungsweise die Coordinaten haben:

$$A_1', B_1', C_1', \quad A_2', B_2', C_2', \quad A_1'', B_1'', C_1', \quad A_2'', B_2'', C_2'.$$

und da diese den sehr kleinen Factor $\alpha A+\beta B+\gamma C$ enthalten, so kann man in ihnen wieder a^2, b^2, c^2 durch einen Mittelwerth ersetzen. Die drei letzten Ausdrücke werden daher nahezu gleich, und ihr Mittelwerth sei $-\frac{M}{2}$. Dann also lassen sich die Gleichungen (45.) in der folgenden einfachen Gestalt darstellen:

$$\begin{aligned} A(a^2-m^2)+k\sqrt{-1}(\beta C-\gamma B) &= \alpha M,\\ B(b^2-m^2)+k\sqrt{-1}(\gamma A-\alpha C) &= \beta M,\\ C(c^2-m^2)+k\sqrt{-1}(\alpha B-\beta A) &= \gamma M. \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichungen auf, und läfst den gemeinschaftlichen Nenner mit M in den Factor σ eingehen, so erhält man:

$$(62^a.)\qquad \begin{cases} \sigma A = \alpha[(m^2-b^2)(m^2-c^2)-k^2]+k\sqrt{-1}\,\beta\gamma(c^2-b^2),\\ \sigma B = \beta[(m^2-c^2)(m^2-a^2)-k^2]+k\sqrt{-1}\,\gamma\alpha(a^2-c^2),\\ \sigma C = \gamma[(m^2-a^2)(m^2-b^2)-k^2]+k\sqrt{-1}\,\alpha\beta(b^2-a^2); \end{cases}$$

und setzt man

$$U = \frac{\alpha x+\beta y+\gamma z-m(t-\tau)}{\lambda}2\pi,$$

so ist die allgemeinste Form der resultirenden Bewegungsellipse:

$$(62.)\qquad \begin{cases} \sigma u = \alpha[(m^2-b^2)(m^2-c^2)-k^2]\cos U-k\beta\gamma(c^2-b^2)\sin U,\\ \sigma v = \beta[(m^2-c^2)(m^2-a^2)-k^2]\cos U-k\gamma\alpha(a^2-c^2)\sin U,\\ \sigma w = \gamma[(m^2-a^2)(m^2-b^2)-k^2]\cos U-k\alpha\beta(b^2-a^2)\sin U. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezüglich mit α, β, γ und addirt, so erhält man

$$u\alpha+v\beta+w\gamma = 0,$$

indem man die Gleichung (59.) berücksichtigt.

Nach der *Neumann*schen Hypothese hingegen erhält man, durch Anwendung der Gleichungen (52.), (55.) für die Coefficienten der Gleichungen (45.), wenn man m_1 die andre Wurzel der Gleichung (59.) nennt und die aus (59.) folgende Gleichung bemerkt:

$$m^2+m_1^2 = (b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2,$$

die nachstehenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha^2+a_{12}\beta^2+a_{13}\gamma^2-m^2-\mu &= m_1^2-a^2,\\ a_{12}\alpha^2+a_{22}\beta^2+a_{23}\gamma^2-m^2-\mu &= m_1^2-b^2,\\ a_{13}\alpha^2+a_{23}\beta^2+a_{33}\gamma^2-m^2-\mu &= m_1^2-c^2 \end{aligned}$$

und

$$a_{11}\alpha A + a_{12}\beta B + a_{13}\gamma C$$
$$= (c^2+b^2+a^2+f)(\alpha A+\beta B+\gamma C) - (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) - a^2(\alpha A+\beta B+\gamma C),$$
$$a_{12}\alpha A + a_{22}\beta B + a_{23}\gamma C$$
$$= (c^2+b^2+a^2+f)(\alpha A+\beta B+\gamma C) - (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) - b^2(\alpha A+\beta B+\gamma C),$$
$$a_{13}\alpha A + a_{23}\beta B + a_{33}\gamma C$$
$$= (c^2+b^2+a^2+f)(\alpha A+\beta C+\gamma C) - (a^2\alpha A + b^2\beta B + c^2\gamma C) - c^2(\alpha A+\beta B+\gamma C).$$

Bezeichnet man den mittlern Werth der letzten drei Ausdrücke, ähnlich wie oben, durch $\frac{M}{2}$, so kann man den Gleichungen (45.) folgende Gestalt geben:

$$A(a^2-m_1^2) - k\sqrt{-1}(\beta C - \gamma B) = \alpha M,$$
$$B(b^2-m_1^2) - k\sqrt{-1}(\gamma A - \alpha C) = \beta M,$$
$$C(c^2-m_1^2) - k\sqrt{-1}(\alpha B - \beta A) = \gamma M;$$

wodurch man für die Gleichungen der Ellipse erhält:

$$(63.)\quad \begin{cases} \sigma u = \alpha[(m_1^2-b^2)(m_1^2-c^2) - k^2]\cos U + k\beta\gamma(c^2-b^2)\sin U, \\ \sigma v = \beta[(m_1^2-c^2)(m_1^2-a^2) - k^2]\cos U + k\gamma\alpha(a^2-c^2)\sin U, \\ \sigma w = \gamma[(m_1^2-a^2)(m_1^2-b^2) - k^2]\cos U + k\alpha\beta(b^2-a^2)\sin U. \end{cases}$$

Man sieht, dafs diese Gleichungen sich von den Gleichungen (62.) nur dadurch unterscheiden, dafs m_1 an die Stelle von m getreten ist, und dafs k sein Zeichen gewechselt hat.

§. 8.

Bewegungsrichtung in den Transversalwellen.

Es sollen m, m_1 die positiven Quadratwurzeln von m^2, m_1^2 bedeuten, und also α, β, γ die Cosinus der Richtung sein, in welcher die Wellen fortschreiten. Dann sollen α', β', γ' und α'', β'', γ'' die Richtungen zweier Linien bezeichnen, welche gegen einander senkrecht in der Wellenebene liegen; und diese drei gegen einander rechtwinkligen Richtungen sollen durch passende Drehung zur Congruenz bezüglich mit der positiven X-, Y-, Z-Axe gebracht werden können.

Das Coordinatensystem der X, Y, Z soll endlich eine solche Lage haben, dafs von der positiven X-Axe aus gesehen, der Zeiger einer Uhr in der YZ-Ebene sich von der positiven Y-Axe durch 90^0 zur positiven Z-Axe bewege. In Bezug auf diese Bestimmungen will ich den Krystall positiv oder negativ nennen, je nachdem die Constante k einen positiven oder negativen Werth hat.

Die drei Richtungen α, β, γ, etc. bilden dann ein Coordinatensystem ξ, η, ζ, welches durch die Transformationsformeln gegeben ist:

$$\begin{aligned}\xi &= u\alpha + v\beta + w\gamma\,,\\ \eta &= u\alpha' + v\beta' + w\gamma'\,,\\ \zeta &= u\alpha'' + v\beta'' + w\gamma'',\end{aligned}$$

und die Determinante dieses Systems ist $+1$, so dafs die Gleichungen bestehen:

$$(64.)\qquad \alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'',\quad \beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'',\quad \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha''.$$

Bildet man jetzt die Flächenelemente dF_1, dF_2, welche der Radius vector des bewegten Molecüls in den beiden Transversalwellen beschreibt, und rechnet dieselben positiv, wenn dieser sich von der positiven η-Axe durch 90^0 zur positiven ζ-Axe bewegt, und unterscheidet man wieder das beiden Wellen Angehörige durch die Indices 1, 2, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (64.) leicht:

$$(65.)\qquad \begin{cases} 2dF_1 = \eta_1 d\zeta_1 - \zeta_1 d\eta_1 = \dfrac{2\pi m_1}{\lambda}\,dt \begin{vmatrix} A_1', & A_1'', & \alpha \\ B_1', & B_1'', & \beta \\ C_1', & C_1'', & \gamma \end{vmatrix}, \\ 2dF_2 = \eta_2 d\zeta_2 - \zeta_2 d\eta_2 = \dfrac{2\pi m_2}{\lambda}\,dt \begin{vmatrix} A_2', & A_2'', & \alpha \\ B_2', & B_2'', & \beta \\ C_2', & C_2'', & \gamma \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Multiplicirt man aber diese Gleichungen mit einander, und benutzt den bekannten Satz über die Multiplication von Determinanten, so wird

$$4dF_1\,dF_2 =$$

$$\frac{4\pi^2 m_1 m_2}{\lambda^2}\,dt^2 \begin{vmatrix} A_1'A_2' + B_1'B_2' + C_1'C_2', & A_1''A_2' + B_1''B_2' + C_1''C_2', & \alpha A_2' + \beta B_2' + \gamma C_2' \\ A_1'A_2'' + B_1'B_2'' + C_1'C_2'', & A_1''A_2'' + B_1''B_2'' + C_1''C_2'', & \alpha A_2'' + \beta B_2'' + \gamma C_2'' \\ A_1'\alpha + B_1'\beta + C_1'\gamma, & A_1''\alpha + B_1''\beta + C_1''\gamma, & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{vmatrix}.$$

Bemerkt man nun, dafs wegen der Gleichungen (61.) vier Elemente dieser Determinante verschwinden, und dafs nach (22.):

$$\begin{aligned} A_1'A_2' + B_1'B_2' + C_1'C_2' &= -(A_1''A_2'' + B_1''B_2'' + C_1''C_2'') = p,\\ A_1''A_2' + B_1''B_2' + C_1''C_2' &= \quad A_1'A_2'' + B_1'B_2'' + C_1'C_2'' \;= q, \end{aligned}$$

so geht die obige Gleichung über in

$$4dF_1\,dF_2 \;=\; -\frac{4\pi^2 m_1 m_2}{\lambda^2}\,dt^2(p^2 + q^2).$$

Dies zeigt, ***daſs die Bewegungen in den beiden Transversalwellen immer in entgegengesetztem Sinne vor sich gehen,*** da das Product der Flächenelemente stets negativ ist.

Um den Sinn der Drehung in jeder der Wellen zu bestimmen, mag zuerst die ***Fresnel***sche Hypothese untersucht werden. Wenn man in (65.) die A, B, C aus (62^a.) bestimmt, so erhält man:

$$dF_1 = \frac{k\pi m_1}{\sigma^2\lambda}\,dt \begin{vmatrix} \alpha(m_1^2-b^2)(m_1^2-c^2), & \beta\gamma(c^2-b^2), & \alpha \\ \beta(m_1^2-c^2)(m_1^2-a^2), & \gamma\alpha(a^2-c^2), & \beta \\ \gamma(m_1^2-a^2)(m_1^2-b^2), & \alpha\beta(b^2-a^2), & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k\pi m_1}{\sigma^2\lambda}\,dt\,\{\beta^2\gamma^2(c^2-b^2)^2(m_1^2-a^2)+\gamma^2\alpha^2(a^2-c^2)^2(m_1^2-b^2)+\alpha^2\beta^2(b^2-a^2)^2(m_1^2-c^2)\},$$

$$dF_2 = \frac{k\pi m_2}{\sigma^2\lambda}\,dt \begin{vmatrix} \alpha(m_2^2-b^2)(m_2^2-c^2), & \beta\gamma(c^2-b^2), & \alpha \\ \beta(m_2^2-c^2)(m_2^2-a^2), & \gamma\alpha(a^2-c^2), & \beta \\ \gamma(m_2^2-a^2)(m_2^2-b^2), & \alpha\beta(b^2-a^2), & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k\pi m_2}{\sigma^2\lambda}\,dt\,\{\beta^2\gamma^2(c^2-b^2)^2(m_2^2-a^2)+\gamma^2\alpha^2(a^2-c^2)^2(m_2^2-b^2)+\alpha^2\beta^2(b^2-a^2)^2(m_2^2-c^2)\}.$$

Die eingeklammerten Ausdrücke müssen nach dem Obigen immer entgegengesetztes Zeichen haben; daher ist nothwendig derjenige von beiden positiv, welcher der gröfsern Wurzel entspricht, der andere negativ; und man hat somit den Satz:

In positiven Krystallen geschieht die Bewegung, von derjenigen Seite gesehen, nach welcher die Welle sich bewegt, in demselben Sinne wie bei dem Zeiger einer Uhr bei der Welle mit gröfserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, entgegengesetzt in der andern.

Dieser Satz ist auch noch richtig nach der Neumannschen Hypothese; denn weil man nach derselben m_1 und m_2 zu vertauschen hat, zugleich aber auch $-k$ an die Stelle von k zu setzen, so bleiben die Vorzeichen von dF_1, dF_2 hierdurch unverändert.

In negativen Krystallen tritt natürlich genau das Gegentheil des oben ausgesprochenen Satzes ein.

§. 9.

Die Wellenfläche.

Die Wellenfläche, deren Gleichung durch (59.) gegeben ist, besteht aus zwei Mänteln, da diese Gleichung quadratisch ist für m^2. Bemerkt man

ferner die für z identische Gleichung

$$(z^2-m_1^2)(z^2-m_2^2) = (z^2-b^2)(z^2-c^2)\alpha^2+(z^2-c^2)(z^2-a^2)\beta^2+(z^2-a^2)(z^2-b^2)\gamma^2-k^2,$$

so ergeben sich daraus für $z^2 = a^2, b^2, c^2$ die Gleichungen

$$(66.)\quad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{(a^2-m_1^2)(a^2-m_2^2)+k^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ \beta^2 = \dfrac{(b^2-m_1^2)(b^2-m_2^2)+k^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ \gamma^2 = \dfrac{(c^2-m_1^2)(c^2-m_2^2)+k^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{cases}$$

Von diesen hebe ich zunächst nur die zweite hervor. Ist $a^2 > b^2 > c^2$, so zeigt dieselbe, dafs der Ausdruck

$$(b^2-m_1^2)(b^2-m_2^2) = \beta^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)-k^2$$

wesentlich negativ ist und nie kleiner werden kann als k^2. Es ist daher immer ein Werth von m^2 gröfser, der andere kleiner als b^2, und dieselben können nie einander gleich werden. Die Oberfläche besteht daher aus zwei ganz getrennten Hälften, welche sich aufserhalb und innerhalb einer Kugel vom Radius b befinden.

Was die Construction der Oberfläche anbetrifft, so kann man allerdings ein Verfahren aufstellen, welches eine Verallgemeinerung der *Fresnel*schen Construction ist, doch wird dasselbe hier nutzlos. Ich bemerke es nur, um des folgenden allgemeinen Theorems zu gedenken, aus welchem diese so wie die *Fresnel*sche Construction als Beispiele folgen:

Es seien A, B, C Functionen des Radius Vector m; λ, μ, ν die Cosinus seiner Richtung; sucht man sodann die Maxima des Radius Vector in dem Durchschnitt der Oberfläche

$$\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\frac{\nu^2}{C} = 0$$

mit der Ebene

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu = 0,$$

und trägt die erhaltenen Längen auf der Richtung der Normale (α,β,γ) ***dieser Ebene an, so erhält man die Oberfläche***

$$A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2 = 0,$$

von welcher man auf die nämliche Weise wieder zu der ersten zurückkehren kann.

Da nämlich die Gleichung $\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$ besteht, so findet man offenbar die Maxima von m aus den Gleichungen

$$\left(p+\frac{1}{A}\right)\lambda = q\alpha,$$

$$\left(p+\frac{1}{B}\right)\mu = q\beta,$$

$$\left(p+\frac{1}{C}\right)\nu = q\gamma,$$

wo p, q unbekannte Coefficienten sind. Multiplicirt man aber diese Gleichungen bezüglich mit λ, μ, ν und addirt, so kommt

$$p = 0,$$

und daher

$$\lambda = q\alpha A, \quad \mu = q\beta B, \quad \nu = q\gamma C,$$

oder wenn man bezüglich mit α, β, γ multiplicirt und addirt:

$$\alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C = 0.$$

Dies giebt im vorliegenden Fall einen Zusammenhang zwischen der Oberfläche

(66ª.) $$\frac{\lambda^2}{(m^2-b^2)(m^2-c^2)-k^2} + \frac{\mu^2}{(m^2-c^2)(m^2-a^2)-k^2} + \frac{\nu^2}{(m^2-a^2)(m^2-b^2)-k^2} = 0$$

und der Wellenfläche, welcher aber nur für $k = 0$ von Nutzen ist.

Dagegen kann man die Wellenfläche zusammengesetzt denken aus einer Reihe von sphärischen Ellipsen, welche, wenn p einen constanten Parameter bedeutet, die Durchschnitte der Kugeln

$$m^2 = p^2$$

mit dem Kegelsystem

(67.) $$\{(p^2-b^2)(p^2-c^2)-k^2\}\alpha^2 + \{(p^2-c^2)(p^2-a^2)-k^2\}\beta^2 + \{(p^2-a^2)(p^2-b^2)-k^2\}\gamma^2 = 0$$

sind. In jedem Radius Vector der Oberfläche schneiden sich zwei der Kegel (67.), deren Parameter die ihm zukommenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten angeben, und von deren sphärischen Ellipsen eine dem äufsern, die andere dem innern Mantel der Oberfläche angehört.

Unter diesen Kegeln sind diejenigen hervorzuheben, welche in ein Ebenenpaar zerfallen. Dies geschieht nur bei denjenigen, in welchen einer der Coefficienten von α^2, β^2, γ^2 in (67.) verschwindet; und das Ebenenpaar ist nur reell, wenn der mittlere Coefficient verschwindet, d. h. wenn

(68.) $$(p^2-a^2)(p^2-c^2) = k^2,$$

wodurch die Gleichung (67.) übergeht in

(69.) $$\alpha^2(p^2-c^2)(a^2-b^2) = \zeta^2(p^2-a^2)(b^2-c^2).$$

Da die Gleichung (68.) für p^2 quadratisch ist, so stellt (69.) zwei Ebenenpaare vor. Dieselben sind symmetrisch gegen die YZ-Ebene und schneiden sich in der Y-Axe; es sind die Ebenen der Kreisschnitte der Wellenoberfläche, — jede dieser Ebenen schneidet dieselbe in einem Kreise und einem Oval.

Um die Richtung des Strahles zu finden, welcher einer gegebenen Welle angehört, hat man nur den Durchschnittspunkt benachbarter Wellen zu bestimmen, welche zu gleicher Zeit vom Mittelpunkt ausgegangen sind, und sich die Zeit 1 hindurch vorwärts bewegt haben. Die Gleichung der gegebenen Wellenebene sei:

$$(70.) \qquad x\alpha + y\beta + z\gamma = m,$$

wo x, y, z die Coordinaten desjenigen Punktes bedeuten mögen, nach welchem der Strahl gerichtet ist. Für benachbarte Wellen, welche durch eben diesen Punkt gehen, ist dann:

$$(71.) \qquad x\,d\alpha + y\,d\beta + z\,d\gamma = dm.$$

Stellt man ferner die Wellenfläche wieder unter der allgemeinen Gestalt dar:

$$(72.) \qquad 0 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = m^4 - 2pm^2 + q,$$

so hat man für die nächsten Wellen noch

$$A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta + C\gamma\,d\gamma + 2(m^2 - p)m\,dm = 0,$$

oder, wenn man mit m_1 die zweite Wurzel von (72.) bezeichnet,

$$(73.) \qquad A\alpha\,d\alpha + B\beta\,d\beta + C\gamma\,d\gamma + (m^2 - m_1^2)m\,dm = 0.$$

Hierzu kommen noch die beiden Beziehungen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0,$$

von denen die letzte mit den Gleichungen (71.), (73.) verträglich sein mufs für alle beliebigen Werthe der Differentiale $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, welche dieser letzten Gleichung genügen. Daher mufs diese Gleichung sich als Folge von (71.), (73.) darstellen lassen, oder es mufs sein:

$$\begin{aligned} m(m_1^2 - m^2)x &= (A + \varrho)\alpha, \\ m(m_1^2 - m^2)y &= (B + \varrho)\beta, \\ m(m_1^2 - m^2)z &= (C + \varrho)\gamma, \end{aligned}$$

durch ϱ einen unbekannten Factor bezeichnet. Multiplicirt man aber bezüglich mit α, β, γ und addirt, so kommt

$$m^2(m_1^2 - m^2) = \varrho,$$

und indem man diesen Werth, sowie die Werthe von A, B, C einführt, erhält man für die Coordinaten des Strahls die Ausdrücke:

$$(73^a.)\qquad \begin{cases} x = \alpha\left(m + \dfrac{(m^2-b^2)(m^2-c^2)-k^2}{m^2(m_1^2-m^2)}\right), \\ y = \beta\left(m + \dfrac{(m^2-c^2)(m^2-a^2)-k^2}{m^2(m_1^2-m^2)}\right), \\ z = \gamma\left(m + \dfrac{(m^2-a^2)(m^2-b^2)-k^2}{m^2(m_1^2-m^2)}\right). \end{cases}$$

Die Aufstellung derjenigen Oberfläche, auf welcher alle Punkte x, y, z sich befinden, scheint mit grofsen Schwierigkeiten verknüpft zu sein.

Ich bemerke über die Lage des Strahls noch den folgenden Satz, welcher auf einer allgemeinen Eigenschaft beruht:

Die Ebene des Strahls und der Wellennormale ist senkrecht auf der Wand desjenigen Constructionskegels (67.), ***dessen Parameter die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellennormale anzeigt.***

Um diesen Satz einzusehen, hat man nur in dem Schnitt der Wellenebene mit diesem Kegel, auf dessen Seite dieselbe senkrecht ist, vorwärts zu gehen. Alsdann bleibt m constant, und die Gleichung (70.) giebt

$$x\,d\alpha + y\,d\beta + z\,d\gamma = 0,$$

d. h. der Strahl ist gegen das Element der Schnittcurve senkrecht; woraus ohne Weiteres der obige Satz folgt.

Will man sich der Oberfläche ($66^a.$) bedienen, so findet man noch leicht den Satz, welcher hier wie bei der *Fresnel*schen Fläche gilt:

Die Ebene des Strahls und der Wellennormale geht durch denjenigen Radius Vector des construirenden Schnitts der Oberfläche ($66^a.$) ***hindurch, welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellennormale darstellt.***

Es bleibt endlich übrig, die Elemente der Bewegungsellipsen (62.) oder (63.) mit der Wellenfläche in geometrische Beziehung zu setzen; wobei wieder die beiden Hypothesen sich scheiden. In jedem Falle sind beide Bewegungsellipsen auf conjugirte Durchmesser bezogen, von denen der eine (der zweite) in beiden dieselbe Richtung hat. ***Von den beiden andern Durchmessern steht nach der Fresnelschen Hypothese offenbar jeder senkrecht auf der Wand desjenigen Constructionskegels, welcher die seiner Ellipse zukommende Fortpflanzungsgeschwindigkeit anzeigt; nach der Neumannschen aber auf der Wand des andern Kegels.***

Die zu diesen Richtungen conjugirten Durchmesser, welche zusammenfallen, sind aber nach beiden Hypothesen parallel dem Durchschnitte der Wellenebene mit der Tangentenebene des Fresnelschen Ovaloids

$$m^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

zu finden, diese Tangentenebene da gelegt, wo die Wellennormale das Ovaloid durchschneidet. Denn diese Linie steht senkrecht auf der Wellennormale, deren Cosinus sich verhalten wie $\alpha:\beta:\gamma$, und auf der Normale des Ovaloids, deren Cosinus sich verhalten wie:

$$\alpha(2m^2 - a^2) : \beta(2m^2 - b^2) : \gamma(2m^2 - c^2).$$

Die Cosinus der gesuchten Richtung verhalten sich also wie:

$$\beta\gamma(c^2 - b^2) : \gamma\alpha(a^2 - c^2) : \alpha\beta(b^2 - a^2),$$

wie es wirklich bei der geforderten stattfindet.

§. 10.

Richtungen circularer Polarisation.

Es ist von Interesse zu untersuchen, in welchen Richtungen die Bewegungsellipsen in Kreise übergehen, welches der Aehnlichkeit wegen bei beiden zugleich geschehen mufs. Alsdann sind nothwendig die conjugirten Durchmesser der Bewegungscurven gegen einander senkrecht; was aus (62.) oder (63.) auf die Gleichung

$$\alpha\beta\gamma = 0$$

führt. Die Welle eines circularpolarisirten Strahls geht daher immer durch eine Axe. Man überzeugt sich aber auch leicht, dafs in der Richtung der Axen selbst keine circulare Polarisation eintritt. Es kann daher für dergleichen Richtungen nicht mehr als *eine* der Gröfsen α, β, γ verschwinden. Es sei dies β. Die Gleichungen (62.) gehen dann über in:

$$\begin{aligned}
\sigma u &= \alpha[(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2]\cos U, \\
\sigma v &= -k\gamma\alpha(a^2 - c^2)\sin U, \\
\sigma w &= \gamma[(m^2 - a^2)(m^2 - b^2) - k^2]\cos U.
\end{aligned}$$

Zugleich aber kann man, in Folge der Gleichung der Wellenfläche, setzen:

$$(74.) \quad \begin{cases} \alpha((m^2 - b^2)(m^2 - c^2) - k^2) = \mu\gamma, \\ \gamma((m^2 - b^2)(m^2 - a^2) - k^2) = -\mu\alpha, \end{cases}$$

wo μ einen unbekannten Factor bedeutet. Alsdann kann man für die Bewegungsgleichungen schreiben:

$$\sigma u = \mu\gamma\cos U, \quad \sigma v = -k\gamma\alpha(a^2-c^2)\sin U, \quad \sigma w = -\mu\alpha\cos U.$$

Die Projectionen des einen conjugirten Halbmessers sind also $\mu\gamma$, 0, $-\mu\alpha$, die des andern 0, $-k\gamma\alpha(a^2-c^2)$, 0. Damit die Curve ein Kreis sei, müssen beide Halbmesser gleiche Längen haben; und da $\alpha^2+\gamma^2=1$, so hat man demnach:

$$\mu^2 = k^2\gamma^2\alpha^2(a^2-c^2)^2, \qquad \mu = \pm k\gamma\alpha(a^2-c^2).$$

Dies in die Gleichungen (74.) eingeführt, giebt:

$$\gamma^2 = \pm\frac{(m^2-b^2)(m^2-c^2)-k^2}{k(a^2-c^2)}, \qquad \alpha^2 = \mp\frac{(m^2-b^2)(m^2-a^2)-k^2}{k(a^2-c^2)};$$

und wenn man jetzt die Gleichung $\alpha^2+\gamma^2=1$ benutzt, so hat man:

$$(75.) \qquad m^2 = b^2 \pm k, \quad \alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad \gamma^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

Die Werthe von α, γ sind hier wirklich reell, werden aber durch Vertauschung der a, b, c imaginär. ***Es giebt daher Richtungen circularpolarisirter Strahlen nur in der Ebene der gröfsten und kleinsten Axe. Und diese Richtungen sind genau dieselben, welche bei linearpolarisirenden Medien die optischen Axen genannt werden; die Differenz der Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für diese Wellen ist gleich dem Doppelten der Constante k, welche für die Polarisationseigenschaften des Mediums characteristisch ist.***

Man sieht sogleich, dafs es für diese Betrachtungen gleichgültig ist, ob man von der *Fresnel*schen oder von der *Neumann*schen Hypothese ausgeht.

Aus dem Obigen folgt, dafs eine Platte, gegen eine optische Axe senkrecht geschnitten, die Eigenschaft hat, die Polarisationsebene zu drehen; und zwar rechts oder links, jenachdem die Bewegung in der Welle von gröfserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit in gleichem oder entgegengesetztem Sinne erfolgt, wie bei dem Zeiger einer Uhr. Dies combinirt mit den Resultaten des §. 8 zeigt ohne Weiteres, dafs die dort positiv genannten Krystalle in der Richtung der optischen Axen ***rechtsdrehend*** sind, die negativen aber ***linksdrehend.***

§. 11.

Anwendung auf einaxige Krystalle (Quarz).

Es ist sehr leicht, die abgeleiteten Resultate auf einaxige Krystalle anzuwenden. Es sei $b=a$, und also die **Z**-Axe die des Krystalls; ferner

$\beta = 0$, was unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden kann; und ζ der Winkel der Wellennormale gegen die Z-Axe, so dafs

$$\alpha = \sin\zeta, \qquad \gamma = \cos\zeta.$$

Die Gleichung der Wellenfläche geht dann über in

$$(76.) \qquad (m^2 - a^2)(m^2 - c^2\sin^2\zeta - a^2\cos^2\zeta) = k^2.$$

Sie besteht aus zwei Rotationsflächen, welche innerhalb und aufserhalb einer Kugel vom Radius a liegen; die Längen der Radien Vectoren längs der optischen Axe sind gegeben durch die Werthe

$$a^2 - k, \qquad a^2 + k;$$

und überhaupt sind die ein und derselben Richtung angehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten m_1, m_2 durch die Gleichung verbunden:

$$(77.) \qquad (m_1^2 - a^2)(m_2^2 - a^2) = -k^2.$$

Benutzt man die Gleichungen (76.), (77.), um die Ausdrücke (73^a.) für die Coordinaten des Strahls zu transformiren, und bezeichnet man durch ψ den Winkel des Strahls (welcher im Hauptschnitt liegt) gegen die Z-Axe, so kommt:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(2m^2 - a^2)k^2 + (m^2 - a^2)c^2}{(2m^2 - a^2)k^2 + (m^2 - a^2)a^2}\operatorname{tg}\zeta,$$

was dazu dient, die Lage des Strahls vollkommen zu bestimmen.

Die Bewegungsgleichungen (62.) oder (63.) nehmen die Gestalt an:

(*Fresnel*sche Hypothese.)

$$(78.) \quad \begin{cases} \sigma u = ((m^2 - a^2)(m^2 - c^2) - k^2)\cos U\sin\zeta, \\ \sigma v = -k\sin\zeta\cos\zeta(a^2 - c^2)\sin U, \\ \sigma w = ((m^2 - a^2)^2 - k^2)\cos U\cos\zeta, \end{cases}$$

oder

(*Neumann*sche Hypothese.)

$$\begin{cases} \sigma u = ((m_1^2 - a^2)(m_1^2 - c^2) - k^2)\cos U\sin\zeta, \\ \sigma v = +k\sin\zeta\cos\zeta(a^2 - c^2)\sin U, \\ \sigma w = ((m_1^2 - a^2)^2 - k^2)\cos U\cos\zeta. \end{cases}$$

Aus dieser Form sieht man, dafs die Ellipsen bereits auf die Hauptaxen bezogen sind, dafs also eine derselben immer im Hauptschnitt liegt, die andere senkrecht dagegen.

Um die Gleichungen der Ellipsen in ihrer Ebene darzustellen, genügt es, für u, w die Coordinate

$$s = w\sin\zeta - u\cos\zeta$$

einzuführen, wodurch die Gleichungen (78.) mit Beseitigung eines gemeinschaftlichen Factors übergehen in:

$$(79.)\quad \begin{cases} \sigma s = (m^2 - a^2)\cos U, \\ \sigma v = k\sin U, \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \sigma s = (m_1^2 - a^2)\cos U, \\ \sigma v = -k\sin U. \end{cases}$$

Sei m die gröfsere Wurzel der quadratischen Gleichung; dann ist nach (77.) $m^2 > a^2$, $m_1^2 < a^2$; und ferner ist nach (76.)

$$(m^2 - a^2) - (a^2 - m_1^2) = (c^2 - a^2)\sin^2\zeta.$$

Ist also $c^2 > a^2$, so ist $m^2 - a^2 > a^2 - m_1^2$, daher auch

$$m^2 - a^2 > \sqrt{k^2}, \qquad a^2 - m_1^2 < \sqrt{k^2};$$

und man sieht also dafs, *nach der Fresnelschen Hypothese, wenn die ungleiche Axe die gröfsere ist, die grofse Axe der Ellipse mit gröfserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Hauptschnitt liegt; wenn dagegen die ungleiche Axe die kleinere ist, so liegt die grofse Axe der Ellipse mit gröfserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit gegen den Hauptschnitt senkrecht.*

Nach der Neumannschen Hypothese sind diese Verhältnisse nur umzukehren.

Circulare Polarisation findet nur in der Richtung der Axe statt; und zwar ist in dieser Richtung der Krystall rechtsdrehend oder linksdrehend, jenachdem k positiv oder negativ ist.

Ich schliefse mit einer Bemerkung, welche einen scheinbaren Widerspruch der vorliegenden Theorie mit der Erfahrung, sowie mit der von *Maccullagh* aufgestellten Theorie zu beseitigen geeignet ist. In der letzteren ist es wesentlich, dafs zu den gewöhnlichen optischen Gleichungen Glieder hinzutreten, welche mit der reciproken Wellenlänge proportional sind; während in dem Vorliegenden die Gröfse k mit der Wellenlänge direct proportional ist. Dies scheint also darauf hinzuweisen, dafs, wenigstens bei einer Zahl von Substanzen, der erste Theil der Grundfunction K, welcher im §. 6 (43.) allein beibehalten worden ist, unbedeutend sein mufs gegen den folgenden Theil, welcher die vierten Potenzen von α, β, γ enthalten würde, und welcher in der That der Wellenlänge nach (5.) umgekehrt proportional wäre.

Man ist aber in der ganzen vorliegenden Untersuchung darauf geführt worden, dafs es überhaupt bei dem möglichen Grade der Annäherung nicht thunlich ist, in den die Circularpolarisation bedingenden Gliedern die für die verschiedenen Axen eintretenden Unterschiede festzuhalten; sondern dafs vielmehr diese so behandelt werden können, als ob das Medium unkrystallinisch wäre. Daraus geht aber hervor, dafs man höhere Glieder der Entwickelung von K ohne Weiteres dadurch berücksichtigen kann, dafs man die Gröfse k aus den für unkrystallinische Medien vollkommen strengen Gleichungen §.5 (38.) entnimmt, und dafs man also für k eine nach absteigenden Potenzen von λ^2 geordnete Reihe setzen kann; wodurch offenbar in den Gleichungen der obigen Theorie durchaus nichts verändert wird. Es hat also auch keine Schwierigkeit anzunehmen, dafs das erste Glied jener Reihe unbedeutend sei gegen das zweite, und dafs also k wesentlich der reciproken Wellenlänge proportional sei. Und diese Annahme führt dann sehr leicht auf die Gleichungen *Maccullaghs*.

Carlsruhe, den 7ten October 1859.

Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen.

(Von Herrn *Siebeck* zu Liegnitz.)

Wenn einige der wichtigsten Eigenschaften der Ellipse am einfachsten mittelst der Kreisfunctionen, und die diesen entsprechenden Eigenschaften der Hyperbel mittelst der hyperbolischen Functionen hergeleitet werden, so kann von einem allgemeineren Standpunkte aus nach solchen Curven gefragt werden, deren Wesen in den elliptischen Functionen seinen adäquaten Ausdruck findet. In dem nachfolgenden Aufsatze habe ich eine allgemeine Erzeugungsweise solcher Curven gegeben, welche auf einem ähnlichen Princip beruht, wie die Erzeugungsweise der Kegelschnitte mittelst des bekannten Gesetzes der constanten Summe oder Differenz der Entfernungen der Punkte eines Kegelschnitts von den Brennpunkten. Ist nämlich S die Entfernungssumme, D die Entfernungsdifferenz eines Punktes P von zwei festen Punkten A und B, und läfst man P sich so bewegen, dafs fortwährend $mS^2+nD^2=4a^2$ (wo m, n, a constant sind), so giebt es alsdann noch *ein* Paar reelle und *zwei* Paar imaginäre feste Punkte, in Bezug auf welche sich der Punkt P nach demselben Gesetze bewegt. Ich beweise, dafs diese festen Punkte Brennpunkte der in Rede stehenden Curven sind, dafs insbesondere Curven dieser Art, welche in diesem Sinne confocal sind, sich rechtwinklig schneiden. Ferner habe ich zu dem bekannten Gesetz, wonach die Radien Vectoren eines Kegelschnittpunktes mit der Tangente desselben gleiche Winkel bilden, ein entsprechendes für diese Curven hergeleitet. Schliefslich habe ich den Zusammenhang dieser Curven mit $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\mathrm{am}\,u$ nachgewiesen.

I.

Seien A und B zwei feste Punkte einer Ebene, deren Entfernung $2a$ gesetzt wird, P ein Punkt, welcher sich so bewegt, dafs wenn

$$AP+PB=S, \qquad AP-PB=D,$$

fortwährend die Gleichung

$$(1.) \quad mS^2 + nD^2 = 4a^2$$

stattfindet, wo m und n beliebige constante reelle Zahlen sind; gesucht wird zunächst die Gleichung der Bahn des Punktes P.

Ist O Mittelpunkt der Geraden AB und setzen wir $OP=R$, $\angle POA=u$, so ist $\left(\sqrt{R^2+a^2+2Ra\cos u}\pm\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos u}\right)^2$ der Ausdruck für S^2 und D^2. Setzt man diese Werthe in (1.) ein und macht die Gleichung rational, so erhält man nach einer leichten Reduction

$$(2.) \quad [mR^2-(1-m)a^2][nR^2-(1-n)a^2]+(m-n)^2R^2a^2\cos^2 u = 0$$

oder, wenn man $R\cos u = x$, $R\sin u = y$ setzt,

$$(3.) \quad [m(x^2+y^2)-(1-m)a^2][n(x^2+y^2)-(1-n)a^2]+(m-n)^2a^2x^2 = 0$$

als Gleichung der gesuchten Curve. Es ist hierbei jedoch nicht zu übersehen, dafs, wenn wir anstatt von der Gleichung (1.) von folgender:

$$(4.) \quad mD^2 + nS^2 = 4a^2$$

ausgegangen wären, wir ebenfalls die Gleichung (3.) erhalten haben würden. Bei dem Rationalmachen der Gleichung (1.) hat sich daher noch ein zweiter (reeller oder imaginärer) Curvenast eingefunden, welcher der Gleichung (4.) entspricht.

Die erste characteristische Eigenschaft der in Rede stehenden Curve ist nun folgende: Setzt man in (2.) oder (3.) $1-m$ an die Stelle von n, $1-n$ an die Stelle von m und $a^2\frac{(1-m)(1-n)}{mn}$ an die Stelle von a^2, so bleibt die Gleichung, wie man sich leicht überzeugt, ungeändert. Es folgt hieraus, *dafs es in der Geraden AB noch zwei reelle oder imaginäre Punkte A' und B' geben mufs, in Bezug auf welche sich die Curve derselben Eigenschaft erfreut,* welche durch (1.) und (4.) ausgedrückt ist. Denn der eben angegebenen Vertauschung zu Folge würde man die Gleichung (2.) oder (3.) auch erhalten haben, wenn man von einer der beiden Gleichungen

$$(5.) \quad (1-n)S^2+(1-m)D^2 = 4a'^2,$$

$$(6.) \quad (1-n)D^2+(1-m)S^2 = 4a'^2$$

ausgegangen wäre, wo $a' = \pm a\sqrt{\frac{(1-m)(1-n)}{mn}}$.

Wir haben sonach schon vier Gleichungen von der Form der Gleichung (1.), aus welchen die Curve (2.) oder (3.) hergeleitet werden kann;

es läfst sich aber leicht zeigen, ***dafs es noch weitere vier solcher Gleichungen giebt.*** Geben wir nämlich der Gleichung (2.) die Form

$$(7.) \qquad R^4 - LR^2 + M + NR^2\cos^2 u = 0,$$

wo L, M, N die betreffenden Constanten sind, so kann man nach dem Vorhergehenden sagen, dafs jede Curvengleichung von dieser Form als aus einer beliebigen der vier Gleichungen (1.), (4.), (5.), (6.) hergeleitet angesehen werden kann. Vertauscht man nun die Abscissenaxe mit der Ordinatenaxe, was einfach dadurch geschieht, dafs man in Gleichung (7.) den Complementswinkel v von u einführt, so erhält man

$$(8.) \qquad R^4 - (L - N)R^2 + M - NR^2\cos^2 v = 0,$$

also eine Gleichung ***von derselben Form.*** Es mufs daher auch in der Ordinatenaxe zwei Paare von Punkten A und B, A' und B' geben, in Bezug auf welche die Curve die durch die Gleichungen (1.), (4.), (5.), (6.) ausgedrückten Eigenschaften besitzt.

Wir nennen O den Mittelpunkt und die acht Punkte A und B, A' und B', A und B, A' und B' die Brennpunkte der Curve, vorbehaltlich des Nachweises, dafs diese acht Punkte wirklich die Eigenschaften von Brennpunkten in dem gewöhnlichen Sinne besitzen.

II.

Um die Realität der Brennpunkte der durch (7.) ausgedrückten Curve zu untersuchen, haben wir mit Bezugnahme auf (2.)

$$(9.) \qquad \begin{cases} L = a^2\left[\frac{1-m}{m} + \frac{1-n}{n}\right], \\ M = a^4\frac{(1-m)(1-n)}{mn}, \\ N = a^2\frac{(m-n)^2}{mn} \end{cases}$$

zu setzen, woraus man durch Elimination von m und n die Gleichung

$$(10.) \qquad a^4 + Ca^2 + M = 0$$

erhält, wo

$$(11.) \qquad C = L - \frac{L^2 - 4M}{N}.$$

Die vier Wurzeln der Gleichung (10.) geben die Entfernungen der vier in der Axe AB liegenden Brennpunkte.

Um andrerseits die Brennpunkte, welche in der andern Axe liegen, zu ermitteln, haben wir das soeben in Betreff der Gleichung (7.) eingeschlagene Verfahren auch in Betreff der Gleichung (8.) anzuwenden. Wir haben also

$$(12.)\quad \begin{cases} L-N = \alpha^2\left[\frac{1-m}{m}+\frac{1-n}{n}\right], \\ M = \alpha^4\frac{(1-m)(1-n)}{mn}, \\ -N = \alpha^2\frac{(m-n)^2}{mn} \end{cases}$$

zu setzen, woraus die Gleichung

$$(13.)\quad \alpha^4 - C\alpha^2 + M = 0$$

folgt, deren vier Wurzeln die Entfernungen der in der zweiten Axe liegenden Brennpunkte vom Mittelpunkte ausdrücken.

Der eine der Gleichung (10.) genügende Werth von a^2 ist derjenige, von welchem wir in (1.), (4.) ausgingen. Da dieser reell ist, denn ohnedies würden (1.), (4.) aufhören eine geometrische Bedeutung zu haben, so ist der zweite der Gleichung (10.) genügende Werth von a^2 ebenfalls reell, mithin hat a nur reelle oder rein imaginäre Werthe. Aus der Vergleichung von (10.) und (13.) folgt ferner, dafs, wenn $a = e$ ein Wurzelwerth von (10.) ist, $a = e\sqrt{-1}$ ein Wurzelwerth von (13.) sein mufs. Hat sonach die Gleichung (10.) *vier reelle* oder *vier imaginäre* Wurzeln, so hat die Gleichung (13.) *vier imaginäre* oder *vier reelle* Wurzeln; hat dagegen die Gleichung (10.) *zwei reelle* und *zwei imaginäre* Wurzeln, so hat die Gleichung (13.) ebenfalls *zwei reelle* und *zwei imaginäre* Wurzeln. Somit zerfallen überhaupt die in Rede stehenden Curven in *zwei Arten*, nämlich in ***Curven, deren vier reelle Brennpunkte in gerader Linie, und in Curven, deren vier reelle Brennpunkte auf zwei auf einander normalen, sich im Mittelpunkte schneidenden Geraden liegen.*** Gehört eine Curve zur ersteren Art, so hat die eine der Gleichungen (10.) und (13.) vier reelle, die andere vier imaginäre Wurzeln und ***M ist dann positiv;*** gehört sie dagegen zur zweiten Art, so hat jede der Gleichungen (10.) und (13.) zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln und ***M ist dann negativ,*** wonach man also ein leichtes Kennzeichen hat, um an der Gleichung zu sehen, zu welcher von beiden Arten eine solche Curve gehört. Den Uebergang von der einen Art zur andern bilden die Curven, für welche $M = 0$ ist; bei diesen fallen zwei conjugirte Brennpunkte

zusammen, nämlich in den Mittelpunkt; diese Curven können also noch als ***dritte Art*** betrachtet werden.

III.

Um sich eine Gleichung für ein System von Curven mit gemeinschaftlichen Brennpunkten zu verschaffen, braucht man nur die Constanten L, M, N in Gleichung (7.) so von einander in Abhängigkeit zu bringen, dafs die Gleichungen (10.) und (13.), deren Wurzeln die Entfernungen der Brennpunkte vom Mittelpunkt angeben, von einer Curve zur andern sich nicht ändern. Hiernach mufs also M von einer Curve zur andern denselben Werth behalten. Aufserdem mufs auch $C = L - \frac{L^2-4M}{N}$ (s. Gl. (11.)) constant sein. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$(14.) \qquad N = \frac{L^2-4M}{L-C}.$$

Betrachtet man sonach in der nachstehenden Gleichung

$$(15.) \qquad R^4 - LR^2 + M + \frac{L^2-4M}{L-C} R^2 \cos^2 u = 0$$

M und C von einer Curve zur andern als constant, dagegen L als veränderlichen Parameter, so haben die durch diese Gleichung dargestellten Curven die erwähnten acht Brennpunkte gemein. Wir wollen nun zunächst sehen, ob sie sich dergestalt in zwei Schaaren theilen, dafs jede Curve der einen Schaar von jeder Curve der andern Schaar rechtwinklig geschnitten wird.

Ordnet man (15.) nach L, so erhält man

$$(16.) \qquad L^2 - \frac{R^4+CR^2+M}{R^2\sin^2 u} L + \frac{CR^4+CM+4MR^2\cos^2 u}{R^2\sin^2 u} = 0,$$

eine Gleichung vom zweiten Grade, wodurch angezeigt wird, dafs sich in jedem Punkte der Ebene zwei Curven des Systems schneiden, so dafs also hierdurch schon eine Sonderung der Curven in zwei Schaaren bedingt ist. Die beiden Werthe des veränderlichen Parameters L, welche zu einem beliebigen Punkte der Ebene (R, u) gehören, sind in Folge der Gleichung (16.) folgende

$$(17.) \qquad L = \frac{R^4+CR^2+M \pm W}{2R^2\sin^2 u},$$

wo

$$W = \sqrt{(R^4+CR^2+M)^2 - 4R^2\sin^2 u\,(CR^4+CM+4MR^2\cos^2 u)}.$$

Andrerseits folgt aber auch aus (15.), dafs

$$(18.) \qquad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{(L^2-4M)\sin u\cos u}{(2R^2-L)(L-C)+(L^2-4M)\cos^2 u}.$$

Bezeichnet nun τ den Winkel, welchen die in dem Punkte (R, u) an eine der

beiden durch diesen Punkt gehenden Curven gelegte Tangente mit der Abscissenaxe bildet, so ist bekanntlich

$$\text{cotang}(\tau - u) = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}.$$

Aus dieser und den Gleichungen (18.) und (15.) erhält man durch eine leichte Entwickelung

$$(19.) \quad \text{cotang}(\tau - u) = \frac{\text{tang}\, u(M - LR^2 + R^4)}{M - R^4}.$$

Setzen wir hier für L den Werth aus (17.) ein, so erhalten wir

$$(20.) \quad \text{cotang}(\tau - u) = \frac{(R^4 + M)\cos 2u + CR^2 \pm W}{(R^4 - M)\sin 2u}.$$

Sollen die beiden durch diese Gleichung angegebenen Richtungen der Berührungslinien auf einander normal stehen, so ist es nothwendig und hinreichend, dafs

$$\text{cotang}(2\tau_1 - 2u) = \text{cotang}(2\tau - 2u)$$

sei, wenn wir unter τ_1 und τ die Winkel verstehen, welche die beiden Berührungslinien mit der Abscissenaxe bilden. Denn ist $\tau_1 = \frac{1}{2}\pi + \tau$, so ist $\text{cotang}(2\tau_1 - 2u) = \text{cotang}(\pi + 2\tau - 2u) = \text{cotang}(2\tau - 2u)$. Bilden wir also aus (20.) den Ausdruck für $\text{cotang}(2\tau - 2u)$, so werden die Curven der einen Schaar auf denen der andern normal stehen, wenn der für $\text{cotang}(2\tau - 2u)$ gefundene Werth derselbe bleibt, mag man nun der Wurzel W, welche in diesem Ausdruck vorkommt, das Vorzeichen + oder das Vorzeichen − geben.

Setzen wir daher in (20.)

$$(21.) \quad \begin{cases} (R^4 + M)\cos 2u + CR^2 = f, \\ (R^4 - M)\sin 2u = g, \end{cases}$$

so dafs also $\text{cotang}(\tau - u) = \frac{f \pm W}{g}$, so ist

$$\text{cotang}(2\tau - 2u) = \frac{(f \pm W)^2 - g^2}{2(f \pm W)g}.$$

Soll hier die Wahl des Vorzeichens von W auf den Werth des Bruches keinen Einflufs haben, soll also

$$\frac{(f+W)^2 - g^2}{2(f+W)g} = \frac{(f-W)^2 - g^2}{2(f-W)g}$$

sein, so mufs, wie man durch einfache Reduction findet, die Gleichung

$$(22.) \quad f^2 + g^2 = W^2$$

stattfinden. Diese Gleichung wird aber, wenn man für f und g die Werthe aus (21.) wieder einsetzt, ***in der That identisch,*** wie man sich leicht überzeugen kann. ***Demnach ist erwiesen, dafs die Curven der einen Schaar***

auf denen der andern Schaar normal stehen. Die Punkte ***A, B, A′, B′***, etc. sind also auch Brennpunkte in dem gewöhnlichen Sinne. Die untenstehenden Zeichnungen stellen solche Curvensysteme dar, und zwar Fig. 1 ein System von Curven der ersten, Fig. 2 ein System von Curven der zweiten und Fig. 3 ein System von Curven der dritten Art.

Fig. 1

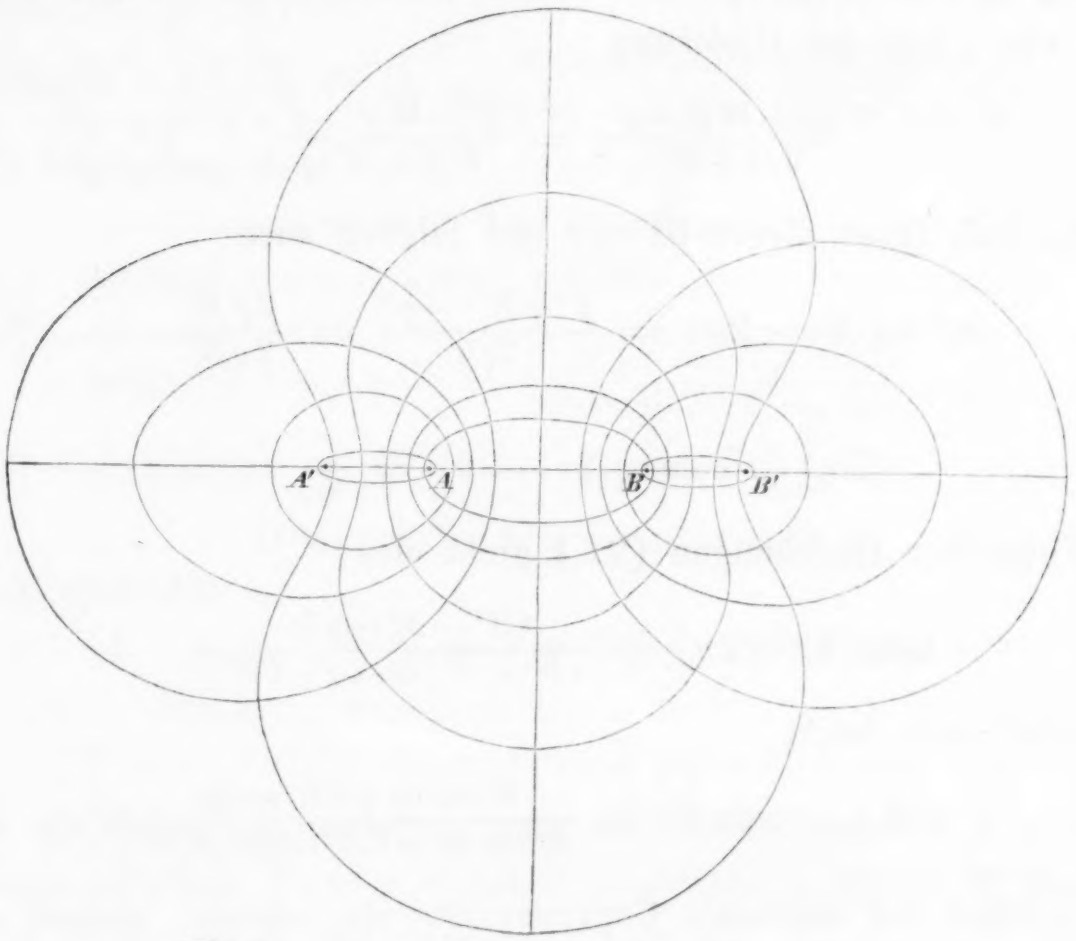


Fig. 2

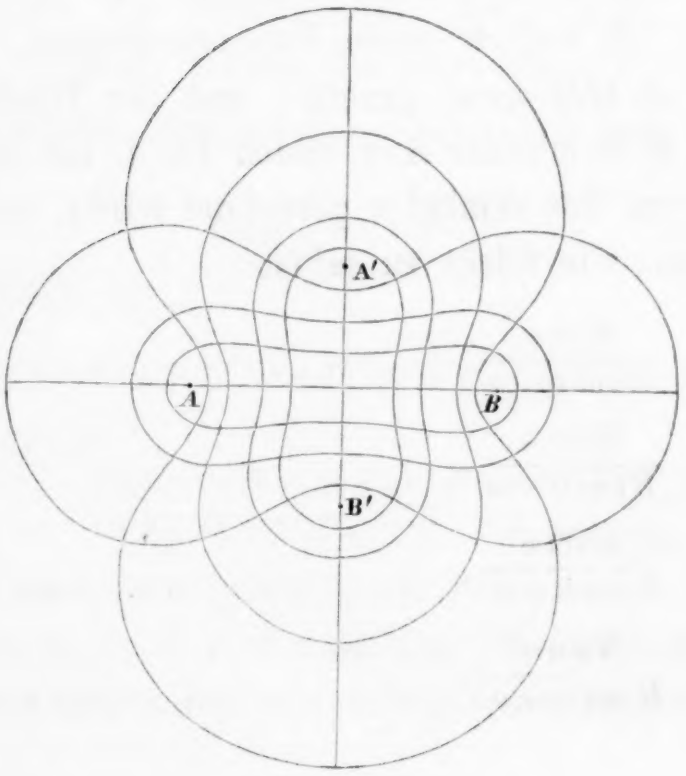
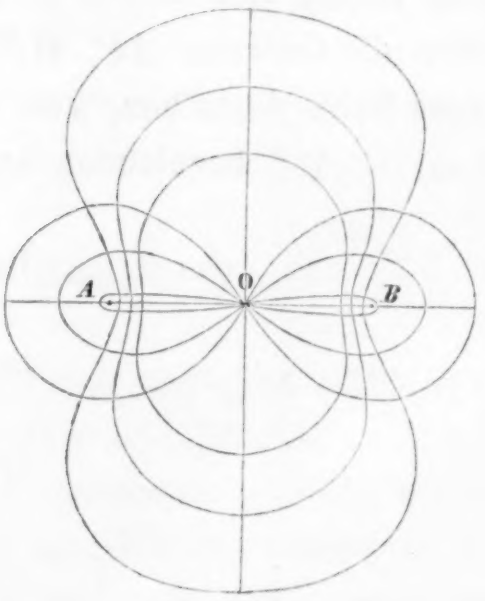


Fig. 3



IV.

Um diejenige Eigenschaft der in Rede stehenden Curven zu ermitteln, welche der bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte entspricht, vermöge welcher je zwei zu ein und demselben Punkte gehörige Radien Vectoren mit der Tangente in diesem Punkte gleiche Winkel einschliefsen, schlagen wir folgenden Weg ein. Aus der Gleichung

$$\frac{(f+W)^2-g^2}{2(f+W)g} = \frac{(f-W)^2-g^2}{2(f-W)g}$$

folgt leicht, dafs jeder dieser Brüche und folglich auch

$$\operatorname{cotang}(2\tau-2u) = \frac{f^2+W^2-g^2}{2fg} = \frac{2fW}{2gW},$$

also

$$(23.) \qquad \operatorname{cotang}(2\tau-2u) = \frac{f}{g}$$

ist. In Folge der Gleichungen (21.) giebt dies

$$\operatorname{tang}(2\tau-2u) = \frac{(R^4-M)\sin 2u}{(R^4+M)\cos 2u+CR^2}.$$

Hieraus erhält man leicht

$$(24.) \qquad \operatorname{tang} 2\tau = \frac{R^4\sin 4u+CR^2\sin 2u}{R^4\cos 4u+CR^2\cos 2u+M}.$$

Sei nun *erstens* das confocale Curvensystem ein solches, dessen vier reelle Brennpunkte A, B, A', B' in ein und derselben Axe liegen, sei O der Mittelpunkt, P ein Punkt der Curve, R und u seine Polarcoordinaten, es werde ferner $OA = OB = a$, $OA' = OB' = a'$ gesetzt, und die Winkel, welche die Geraden AP, BP, $A'P$, $B'P$ mit der Axe bilden (d. h. mit derjenigen Seite derselben, von welcher an der Winkel u gerechnet wird), seien mit α, β, γ, δ bezeichnet, so hat man, wie leicht zu sehen:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{R\sin u}{R\cos u+a},$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{R\sin u}{R\cos u-a},$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{R\sin u}{R\cos u+a'},$$

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{R\sin u}{R\cos u-a'}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht

$$\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{R^2 \sin 2u}{R^2 \cos 2u - a^2},$$

$$\text{tang}(\gamma+\delta) = \frac{R^2 \sin 2u}{R^2 \cos 2u - a'^2},$$

und hieraus

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{R^4 \sin 4u - (a^2+a'^2) R^2 \sin 2u}{R^4 \cos 4u - (a^2+a'^2) R^2 \cos 2u + a^2 a'^2}.$$

Aus (10.) folgt aber, dafs

$$a^2 + a'^2 = -C,$$
$$a^2 a'^2 = M.$$

Folglich ist

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{R^4 \sin 4u + CR^2 \sin 2u}{R^4 \cos 4u + CR^2 \cos 2u + M},$$

woraus bei Vergleichung mit (24.) hervorgeht, dafs

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \text{tang}\, 2\tau$$

und folglich entweder

$$(25.) \quad \begin{cases} \tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \\ \text{oder} \\ \tau = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \frac{1}{2}\pi, \end{cases}$$

jenachdem die Curve zu der einen oder zu der andern Schaar gehört.

Liegen zweitens die vier reellen Brennpunkte A, B, A', B' des Curvensystems auf beiden Axen und bezeichnet man mit α, β, γ, δ die Winkel, welche die Graden AP, BP, $A'P$, $B'P$ mit der Axe AB, mit γ', δ' die Winkel, welche die Geraden $A'P$, $B'P$ mit der Axe $A'B'$ bilden, so ist wiederum $\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{R^2 \sin 2u}{R^2 \cos 2u - a^2}$. Dagegen ist

$$\text{tang}\,\gamma' = \frac{R \cos u}{a' - R \sin u}, \quad \text{tang}\,\delta' = \frac{-R \cos u}{a' + R \sin u},$$

folglich

$$\text{tang}\,\gamma = \text{tang}(\gamma' - \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{R \sin u - a'}{R \cos u}, \qquad \text{tang}\,\delta = \text{tang}(\delta' - \tfrac{1}{2}\pi) = \frac{R \sin u + a'}{R \cos u}.$$

Somit ist

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{R^4 \sin 4u - (a^2 - a'^2) R^2 \sin 2u}{R^4 \cos 4u - (a^2 - a'^2) R^2 \cos 2u - a^2 a'^2}.$$

Da aber hier

$$a^2 - a'^2 = -C,$$
$$-a^2 a'^2 = M,$$

so ist wiederum

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{R^4\sin 4u + CR^2\sin 2u}{R^4\cos 4u + CR^2\cos 2u + M},$$

also auch hier

$$\text{tang}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \text{tang}\,2\tau.$$

Wir haben sonach folgenden Satz: ***Der Winkel, welchen eine beliebige Tangente einer Curve der in Rede stehenden Art mit einer der beiden Axen bildet, ist der halben Summe der Winkel, welche die vier von den reellen Brennpunkten nach dem Berührungspunkte der Tangente gehenden Radien Vectoren mit der erwähnten Axe bilden, entweder gleich, oder er übertrifft diese Summe um einen rechten Winkel.***

Setzt man in (1.) m oder n gleich Null, so ist die Curve offenbar eine Ellipse oder Hyperbel. Es ist aber alsdann, wie man leicht ersieht, $a' = \infty$ und es fallen also bei den Kegelschnitten zwei von den vier reellen Brennpunkten ins Unendliche. Der eben bewiesene allgemeine Satz giebt dann die im Anfang dieses Paragraphen erwähnte Eigenschaft der Kegelschnitte.

V.

Um den Zusammenhang der in diesem Aufsatze behandelten Curven mit den elliptischen Functionen darzulegen, mufs ich auf einen Aufsatz im LV^sten^ Bande dieses Journals verweisen, in welchem ich unter Andern dargethan habe, dafs, wenn man $a+b\sqrt{-1}$ als Ausdruck desjenigen Punktes betrachtet, dessen Coordinaten a, b sind, $\cos(u+vi)$ für ein constantes v und veränderliches u Ausdruck einer Ellipse, für ein constantes u aber und veränderliches v Ausdruck einer Hyperbel ist, welche Kegelschnitte beide ihre Brennpunkte in $+1$ und -1 haben. Giebt man also dem v hintereinander mehrere constante Werthe und setzt u variabel, und giebt dann ebenso dem u mehrere constante Werthe und setzt v variabel, so erhält man ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln, als dessen Ausdruck die Function zweier Variabeln $\cos(u+vi)$ betrachtet werden kann.

Ich behaupte nun, dafs die Functionen zweier Variabeln $\text{sin am}(u+vi)$, $\text{cos am}(u+vi)$, $\Delta\text{am}(u+vi)$ ganz in derselben Weise die Ausdrücke für die oben behandelten Curvensysteme sind, und zwar dergestalt, dafs $\text{sin am}(u+vi)$ Ausdruck eines Curvensystems ist, dessen vier reelle Brennpunkte in gerader Linie liegen, während durch $\text{cos am}(u+vi)$ und $\Delta\text{am}(u+vi)$ solche Systeme

dargestellt werden, in welchen die reellen Brennpunkte sich auf zwei zu einander normalen Richtungen befinden.

1. Dem oben citirten Aufsatz gemäfs ist nämlich $\sin\mathrm{am}\,X$ ein Brennpunkt der durch $\sin\mathrm{am}(u+vi)$ dargestellten Curven, wenn

$$\frac{\partial \sin\mathrm{am}\,X}{\partial X} = \cos\mathrm{am}\,X\,\Delta\mathrm{am}\,X = 0.$$

Findet aber die letztere Gleichung statt, so ist $\sin\mathrm{am}\,X$ entweder ± 1, oder $\pm\frac{1}{k}$, wenn k der Modul von $\sin\mathrm{am}\,u$ ist. Demnach hat das Curvensystem $\sin\mathrm{am}(u+vi)$ die vier in gerader Linie liegenden Brennpunkte ± 1 und $\pm\frac{1}{k}$. Bezeichnen wir die ersteren beiden durch I und I', die letzteren durch II und II', ferner einen beliebigen Punkt $\sin\mathrm{am}(u+vi)$ einer jener Curven durch P, so ist noch in Folge jenes Aufsatzes

$$\begin{aligned} PI^2 &= (1-\sin\mathrm{am}(u+vi))(1-\sin\mathrm{am}(u-vi)) \\ &= \frac{(\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,vi-\cos\mathrm{am}\,vi)^2}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}. \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned} PI'^2 &= (1+\sin\mathrm{am}(u+vi))(1+\sin\mathrm{am}(u-vi)) \\ &= \frac{(\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,vi+\cos\mathrm{am}\,vi)^2}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}. \end{aligned}$$

Setzen wir demnach $PI+PI'=S$, $PI-PI'=D$, so ist

$$(26.)\quad \begin{cases} S = \dfrac{2\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,vi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}}, \\ D = \dfrac{2\cos\mathrm{am}\,vi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}}. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen u, so erhält man die Gleichung

$$\frac{D^2}{\cos^2\mathrm{am}\,vi} - \frac{S^2k^2\cos^2\mathrm{coam}\,vi}{k'^2} = 4,$$

welche sich auf folgende geeignetere Form bringen läfst:

$$(27.)\quad \cos^2\mathrm{coam}(v,k')\,S^2 + \cos^2\mathrm{am}(v,k')\,D^2 = 4.$$

Diejenigen Curven des Systems $\sin\mathrm{am}(u+vi)$, für welche v constant angenommen wird, sind also in der That mit der einen Classe der oben behandelten Curven identisch.

Eliminirt man andrerseits v aus den Gleichungen (26.), so erhält man

$$\frac{S^2}{\cos^2\mathrm{coam}\,u} - \frac{D^2k^2\cos^2\mathrm{am}\,u}{k'^2} = 4,$$

und sonach gehören die Curven, für welche u constant angenommen wird, zu derselben Klasse. Bemerkenswerth ist hier noch, dafs der Modulus k nichts anderes ist, als das Verhältnifs des Abstandes des einen Paares conjugirter Brennpunkte vom Mittelpunkte zu dem Abstand des andern Paares.

2. Was die durch $\cos\mathrm{am}(u+vi)$ dargestellten Curvensysteme betrifft, so ist $\cos\mathrm{am}\,X$ ein Brennpunkt dieser Curven, wenn $\sin\mathrm{am}\,X\,\Delta\,\mathrm{am}\,X=0$. Aus letzterer Gleichung folgt aber, dafs in diesem Falle $\cos\mathrm{am}\,X$ die vier Werthe ± 1 und $\pm\frac{k'i}{k}$ hat. Bezeichnen wir sonach wieder diese vier Brennpunkte durch I, I', II, II', so ist

$$PI^2 = (1-\cos\mathrm{am}(u+vi))(1-\cos\mathrm{am}(u-vi))$$
$$= \frac{(\cos\mathrm{am}\,u-\cos\mathrm{am}\,vi)^2}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}.$$

Ebenso ist

$$PI'^2 = \frac{(\cos\mathrm{am}\,u+\cos\mathrm{am}\,vi)^2}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}.$$

Folglich

$$S = \frac{2\cos\mathrm{am}\,u}{\sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}},$$

$$D = -\frac{2\cos\mathrm{am}\,vi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,vi}}.$$

Durch Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen erhält man nach geeigneter Transformation

$$\Delta^2\mathrm{am}(v,k')D^2 - k^2\tan\mathrm{g}^2\mathrm{am}(v,k')S^2 = 4,$$

durch Elimination von v dagegen

$$k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,D^2 + \frac{S^2}{\sin^2\mathrm{coam}\,u} = 4.$$

Also auch diese Curven befolgen das im Anfang zu Grunde gelegte Gesetz. Dieselbe Art der Herleitung ist auch für die Curven $\Delta\mathrm{am}(u+vi)$ statthaft.

Liegnitz, im Sommer 1859.

Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires, extrait d'une lettre à M. *Borchardt.*

(Par M. *Ch. Hermite* à Paris.)

. . . En posant avec M. *Cayley* (p. 139 de ce volume):

$$\varphi = (a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2, \qquad \varphi' = (a', b', c', f', g', h')(x, y, z)^2,$$
$$\varphi'' = (a'', b'', c'', f'', g'', h'')(x, y, z)^2,$$

j'ai cherché à exprimer le résultant au moyen des vingt déterminants que donne le système:

$$\text{(A.)} \qquad \begin{Vmatrix} a, & b, & c, & f, & g, & h \\ a', & b', & c', & f', & g', & h' \\ a'', & b'', & c'', & f'', & g'', & h'' \end{Vmatrix},$$

lorsqu'on prend de toutes les manières possibles, trois colonnes verticales. Pour abréger l'écriture, je les désignerai ainsi: (abc), (abf), (abg), etc., de manière que l'on ait par exemple:

$$(abc) = \begin{Vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{Vmatrix}$$

le terme principal $ab'c''$ étant toujours pris avec le signe $+$. Ceci convenu, je distingue dans le groupe des vingts déterminants les deux suivants, (agh) comme premier terme d'un covariant et (bcf) comme premier terme d'un contrevariant par rapport aux trois formes φ, φ', φ''. Réservant d'en donner plus tard la raison, je me borne en ce moment à développer les expressions de ces deux formes, savoir:

$$f = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x^3 & y^3 & z^3 & x^2y & y^2z & z^2x & xy^2 & yz^2 & zx^2 & xyz \\ \hline +(agh) & -(bfh) & +(cfg) & -(abg) & -(bch) & +(acf) & -(abf) & -(bcg) & +(ach) & -(abc) \\ & & & +(afh) & -(bfg) & -(cgh) & -(bgh) & +(cfh) & -(afg) & -2(fgh) \\ \hline \end{array},$$

$$F = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi^3 & \eta^3 & \zeta^3 & \xi^2\eta & \eta^2\zeta & \zeta^2\xi & \xi\eta^2 & \eta\zeta^2 & \zeta\xi^2 & \xi\eta\zeta \\ \hline +(bcf) & -(acg) & +(abh) & -(bcg) & +(ach) & -(abf) & +(acf) & -(abg) & -(bch) & +(abc) \\ & & & -2(cfh) & +2(afg) & +2(bgh) & +2(cgh) & -2(afh) & +2(bfg) & -4(fgh) \\ \hline \end{array}.$$

Maintenant si l'on désigne par Sf et SF les invariants du quatrième degré de M. *Aronhold* par rapport aux formes cubiques f et F, le résultant sera: $R = SF - 16\,Sf$. Il se trouve donc exprimé au moyen des déterminants

du système (A.) et l'on voit immédiatement que si l'on remplaçe φ, φ', φ'' par: $\lambda\varphi+\lambda'\varphi'+\lambda''\varphi''$, $\mu\varphi+\mu'\varphi'+\mu''\varphi''$, $\nu\varphi+\nu'\varphi'+\nu''\varphi''$, il se reproduit multiplié par la quatrième puissance du déterminant: $\begin{Bmatrix}\lambda, & \lambda', & \lambda''\\ \mu, & \mu', & \mu''\\ \nu, & \nu', & \nu''\end{Bmatrix}$. La démonstration suit d'ailleurs du même principe qu'a employé M. ***Cayley***, en remarquant que si l'on suppose:

$$\varphi=\tfrac{1}{3}\frac{dU}{dx},\qquad \varphi'=\tfrac{1}{3}\frac{dU}{dy},\qquad \varphi''=\tfrac{1}{3}\frac{dU}{dz},$$

$\boldsymbol{U}$ désignant une forme cubique, on aura $\boldsymbol{f=HU}$, $\boldsymbol{F=-PU}$ *).

Mais il est un autre point de vue sous lequel on peut envisager la détermination du résultant en recherchant comme l'a fait le premier M. ***Sylvester*** une expression analogue à celle du discriminant d'une forme cubique. Cette expression remarquable dont la découverte est due à M. ***Aronhold*** étant $64\boldsymbol{S}^3-\boldsymbol{T}^2$, l'analogie que nous voulons suivre, conduit naturellement à essayer d'obtenir, par rapport au système des trois formes proposées, deux invariants ***combinants*** qui coïncident avec $\boldsymbol{T}^2$ et $\boldsymbol{S}^3$ dans le cas particulier ou φ, φ', φ'' sont les dérivées partielles d'une forme cubique. Or M. ***Sylvester*** a déjà donné une fonction qui dans ce cas se réduit non seulement à $\boldsymbol{T}^2$, mais à $\boldsymbol{T}$ lui même, ainsi l'analogie est à cet égard aussi complète qu'on peut le désirer. Mais il n'en est pas absolument de même en ce qui concerne l'autre terme du résultant qui au lieu de devenir $\boldsymbol{S}^3$, se présente comme une fonction linéaire de $\boldsymbol{S}^3$ et $\boldsymbol{T}^2$. Les recherches suivantes conduiront comme on le veut, à un invariant combinant qui se réduit précisément à $\boldsymbol{S}^3$, mais leur objet principal sera surtout de donner un premier exemple de l'extension aux formes à trois indéterminées de méthodes appliquées seulement jusqu'ici aux formes binaires et que j'ai développées dans un mémoire du Journal de Mathématiques de Cambridge et Dublin (année 1854).

Je rappellerai d'abord cette proposition dont je ferai souvent usage. Soit $\boldsymbol{f=\Sigma P x^a y^b z^c}$ un covariant et $\boldsymbol{F}(\xi,\eta,\zeta)$ un contrevariant par rapport à une ou plusieurs formes, en opérant avec $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{F}$ de la manière suivante: $\boldsymbol{\Sigma P}\frac{d^{a+b+c}\boldsymbol{F}}{d\xi^a d\eta^b d\zeta^c}$ on obtiendra un contrevariant, et si d'une manière toute semblable, on opère avec un contrevariant: $\boldsymbol{G=\Sigma Q\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma}$ sur un covariant g,

*) Voyez pour ces notations le travail du même auteur publié dans les transactions de la Société Royale sous le titre: ***A Third Memoir upon Quantics.***

le résultat: $\Sigma Q \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma} g}{dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma}$ sera un covariant. Par la suite et pour désigner d'une manière spéciale ce mode d'opérer avec une forme sur une autre, je conviendrai de la notation suivante:

$$f \divideontimes F = \Sigma P \frac{d^{a+b+c} F}{d\xi^a d\eta^b d\zeta^c}, \qquad G \divideontimes g = \Sigma Q \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma} g}{dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma}.$$

Supposant par exemple que f et F soient le covariant et le contrevariant cubique, par rapport aux trois formes quadratiques φ, φ', φ'', dont les expressions ont été données plus haut, on trouvera:

$$\begin{aligned} f \divideontimes F = {} & 6(agh)(bcf) + 6(bfh)(acg) + 6(cfg)(abh) - 8(afg)(bfg) - 8(bgh)(cgh) \\ & - 8(cfh)(afh) - 4(abf)(acf) + 4(bcg)(abg) - 4(ach)(bch) - 2(abf)(cgh) \\ & + 2(abg)(cfh) + 2(bcg)(afh) - 2(bch)(afg) + 2(acf)(bgh) + 2(ach)(bfg) \\ & + 2(abc)(fgh) + 8(fgh)^2 - (abc)^2. \end{aligned}$$

C'est précisément sauf le signe la quantité T dont M. *Cayley* a donné un autre mode de formation page 142 de ce volume, et on aperçoit immédiatement le lien de cette expression avec l'invariant de sixième ordre des formes cubiques, car en supposant $\varphi = \frac{1}{3}\frac{dU}{dx}$, $\varphi' = \frac{1}{3}\frac{dU}{dy}$, $\varphi'' = \frac{1}{3}\frac{dU}{dz}$ elle se réduit à l'invariant du sixième ordre de U.

Faisons en second lieu:

$$\varphi \divideontimes F = l\xi + m\eta + n\zeta, \quad \varphi' \divideontimes F = l'\xi + m'\eta + n'\zeta, \quad \varphi'' \divideontimes F = l''\xi + m''\eta + n''\zeta,$$

et posons: $\Sigma = -\frac{1}{8^3}\begin{Vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ l'', & m'', & n'' \end{Vmatrix}$, ce déterminant sera un invariant combinant du douzième ordre par rapport aux formes données, et si comme tout à l'heure on fait l'hypothèse $\varphi = \frac{1}{3}\frac{dU}{dx}$, $\varphi' = \frac{1}{3}\frac{dU}{dy}$, $\varphi'' = \frac{1}{3}\frac{dU}{dz}$, on aura précisément: $\Sigma = S^3$, S désignant l'invariant du quatrième ordre de U. Le résultant relatif à φ, φ', φ'' sera donc: $64\Sigma - T^2$, expression analytique qui réalise autant que possible cette analogie avec le discriminant d'une forme cubique que M. *Sylvester* a le premier reconnue.

Mais le fait qu'il importe principalement de remarquer, c'est l'existence des trois contrevariants linéaires simultanés: $\varphi \divideontimes F$, $\varphi' \divideontimes F$, $\varphi'' \divideontimes F$ par rapport au système des formes quadratiques proposées. En effet, si l'on en déduit en transposant, la substitution suivante:

$$x = lX + l'Y + l''Z, \quad y = mX + m'Y + m''Z, \quad z = nX + n'Y + n''Z,$$

et qu'après l'avoir effectuée dans φ, φ', φ'', on désigne les transformées obtenues par: ψ, ψ', ψ'', on aura ces deux propositions:

1°. ψ, ψ', ψ'' sont les dérivées par rapport à X, Y et Z d'une même forme cubique.

2°. Tous les coefficients de cette forme cubique sont des invariants simultanés des trois formes proposées φ, φ', φ''.

Ce second résultat offre le premier exemple de l'extension aux fonctions à trois indéterminées de la notion des formes types, que j'ai introduite dans l'étude des formes binaires de degrés impairs et en partant des covariants linéaires propres à ces formes. En second lieu, considérons en faisant abstraction pour plus de simplicité du dénominateur, la substitution inverse de la précédente, savoir:

$$X=(m'n''-n'm'')x+(n'l''-l'n'')y+(l'm''-m'l'')z=Lx+My+Nz,$$
$$Y=(nm''-mn'')x+(ln''-nl'')y+(ml''-lm'')z=L'x+M'y+N'z,$$
$$Z=(mn'-nm')x+(nl'-ln')y+(lm'-ml')z=L''x+M''y+N''z.$$

Ces trois fonctions linéaires seront évidemment des covariants simultanés de φ, φ', φ'', de plus: $\theta=\varphi X+\varphi' Y+\varphi'' Z$ sera un covariant cubique et:

$$\vartheta=\varphi(Lu+Mv+Nw)+\varphi'(L'u+M'v+N'w)+\varphi''(L''u+M''v+N''w)$$

un covariant double, en u, v, w d'une part et x, y, z de l'autre. Or on a la relation

$$3\vartheta=u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz},$$

d'ou:

$$\tfrac{1}{3}\frac{d\theta}{dx}=L\varphi+L'\varphi'+L''\varphi'',\quad \tfrac{1}{3}\frac{d\theta}{dy}=M\varphi+M'\varphi'+M''\varphi'',$$
$$\tfrac{1}{3}\frac{d\theta}{dz}=N\varphi+N'\varphi'+N''\varphi''.$$

Ainsi les mêmes quantités l, m, n, etc. se présentent dans la transformation de variables comme dans la combinaison syzygétique par laquelle on ramène les formes quadratiques proposées aux dérivées partielles d'une même forme cubique. On peut d'ailleurs aisément les calculer par la remarque suivante. Nommons Φ, Φ', Φ'' les formes adjointes de φ, φ', φ'', et considérons le déterminant: $\begin{Bmatrix} \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi'}{dx}, & \frac{d\varphi''}{dx} \\ \frac{d\varphi}{dy}, & \frac{d\varphi'}{dy}, & \frac{d\varphi''}{dy} \\ \frac{d\varphi}{dz}, & \frac{d\varphi'}{dz}, & \frac{d\varphi''}{dz} \end{Bmatrix}$. En le mettant successivement sous ces

trois formes:

$$\mathfrak{L}\frac{d\varphi}{dx}+\mathfrak{M}\frac{d\varphi}{dy}+\mathfrak{N}\frac{d\varphi}{dz}$$
$$\mathfrak{L}'\frac{d\varphi'}{dx}+\mathfrak{M}'\frac{d\varphi'}{dy}+\mathfrak{N}'\frac{d\varphi'}{dz}$$
$$\mathfrak{L}''\frac{d\varphi''}{dx}+\mathfrak{M}''\frac{d\varphi''}{dy}+\mathfrak{N}''\frac{d\varphi''}{dz}$$

on aura:

$$\varphi\divideontimes F=\xi\Phi\divideontimes\mathfrak{L}+\eta\Phi\divideontimes\mathfrak{M}+\zeta\Phi\divideontimes\mathfrak{N},$$
$$\varphi'\divideontimes F=\xi\Phi'\divideontimes\mathfrak{L}'+\eta\Phi'\divideontimes\mathfrak{M}'+\zeta\Phi'\divideontimes\mathfrak{N}',$$
$$\varphi''\divideontimes F=\xi\Phi''\divideontimes\mathfrak{L}''+\eta\Phi''\divideontimes\mathfrak{M}''+\zeta\Phi''\divideontimes\mathfrak{N}''.$$

L'analyse précédente s'applique évidemment à l'étude de deux formes cubiques binaires simultanées et conduit à l'égard de ces formes à des résultats entièrement semblables à ceux qu'on vient de voir. C'est une extension nouvelle donnée ainsi à l'analogie qu'ont révelé les découvertes de M. ***Hesse*** et de M. ***Aronhold*** entre les formes cubiques ternaires et les formes biquadratiques binaires, et qui doit compter, ce me semble, parmi les résultats les plus intéressants de l'algèbre moderne. Peut-être pourrais-je y revenir plus tard, mais avant de terminer j'indiquerai encore, puisqu'il a été question plus haut des formes types, comment on peut étendre au cas d'un nombre quelconque d'indéterminées la notion des formes canoniques telle que je l'ai donné ailleurs pour les formes binaires. A cet effet j'admettrai l'existence de ***deux covariants*** quadratiques $\varphi(x,y,z,\ldots)$, $\psi(x,y,z,\ldots)$ par rapport à la forme ou au système de formes donné. Cela posé, la substitution linéaire de $x,y,z,\ldots$ en d'autres indéterminées X, Y, Z etc. qui fournira la réduction à la forme canonique, sera définie par les conditions:

$$\varphi(x,y,z\ldots)=aX^2+bY^2+cZ^2+\cdots,$$
$$\psi(x,y,z\ldots)=\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2+\cdots.$$

On verra aisément, comment se présentent en partant de là, les propositions fondamentales que j'ai données dans le cas des formes binaires.

Paris, 14 février 1860.

Druckfehlerverzeichnifs.

Band 56.

S. 149 Gleichung (1.) $-\alpha\beta y$ statt $-\alpha\beta\gamma$.

- 195 Z. 9 v. u. statt des Ausdruckes für $I_k^{(h)}$ ist der folgende zu setzen:

$$I_k^{(h)} = \frac{k^h}{2.4\ldots 2h}\left\{1 - \frac{k^2}{2(2h+2)} + \frac{k^4}{2.4(2h+2)(2h+4)} - \frac{k^6}{2.4.6(2h+2)(2h+4)(2h+6)} + \cdots\right\}$$

- 195 Z. 6 v. u. k^h statt $k^{(h)}$.

Band 57.

- 185 erste Zeile nach der dort obenstehenden Determinante: von derselben statt vor derselben.